С. Д. Шапорев

$$C = A \setminus B = \left\{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\right\} = A \cap \overline{B}$$

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

- *Знакомство с теорией множеств*
- *Основные задачи и методы комбинаторного анализа*
- *Оптимизационные алгоритмы теории графов*
- *Сетевые модели и методы*
- *400 задач с решениями*

$$C = A \oplus B$$

$$\mathrm{id}_A = \left\{(x,x)/x \in A\right\}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\widehat{P}(n,r)$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73
Ш24

Шапорев С. Д.

Ш24 Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 400 с.: ил.

ISBN 978-5-94157-703-3

Рассмотрены вопросы трех разделов, изучаемых в курсе дискретной математики: теории множеств, комбинаторики и теории графов. Изложены основные теоретические сведения и приведены многочисленные примеры решения задач по всем разделам. Для теории множеств обсуждена основная система аксиом, ее модификации и перспективы дальнейшего развития теории на основе аксиоматического метода. Рассмотрены основные типы задач комбинаторики, основанные на 4-х схемах выбора элементов множеств. Приведены основные наиболее употребительные оптимизационные алгоритмы теории графов, алгоритмы сетевого планирования и варианты заданий для выполнения контрольных и расчетно-графических работ.

Для студентов, аспирантов и преподавателей технических вузов

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73

Рецензенты:
Попов М. С. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Балтийского государственного технического университета "Военмех" (БГТУ)
Дегтярев В. Г. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС)

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. гл. редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Наталья Довгулевич*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

ISBN 978-5-94157-703-3

Оглавление

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1. Множества и действия над ними

Первичное понятие теории множеств — понятие самого множества.

Множество — это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается скобками $\{...\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например, $A = \{x \in N / x + 2 = 1\}$ — множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x + 2 = 1$, очевидно пустое. $B = \{$ сложение, умножение $\}$ — множество основных арифметических операций. Если необходимо указать, что объект a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (a принадлежит A), запись $a \notin A$ говорит о том, что a не принадлежит A.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$ и говорят, что множество A является *подмножеством* множества B. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными*, т. е. $A = B$, в противном случае $A \neq B$. Очевидно, что

$A = B \Leftrightarrow \forall x\big((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\big) = \forall x\big[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)\big] = (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Итак, $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Если $M \subseteq A$ и $M \neq \varnothing$, $M \neq A$, то множество M называется *собственным подмножеством* множества A. Пустое множество и множество A называются *несобственными подмножествами* множества A. Если A есть подмножество множества B, причем $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном*, или *множеством-степенью*, и обозначается через $P(A)$ или 2^A. С помощью скобок и операций над множествами можно построить новые множества, более сложные, чем исходные.

1. *Объединение* (или *сумма*). Эта операция над множествами обозначается $A \cup B$ и определяется как $C = A \cup B = \{x \in C / (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера[*]—Венна[**]. Если некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить U (или Ω) и изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество $A \subset U$ можно изобразить в виде части плоскости, т. е. в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. Множество C — объединение множеств A и B (C на рис. 1.1 заштриховано), $C = A \cup B$.

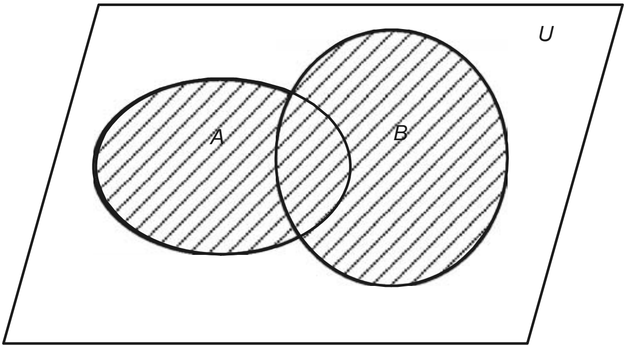

Рис. 1.1

2. *Пересечением* (или *произведением*) двух множеств называется такое множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам, т. е. $C = A \cap B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Пересечение множеств A и B заштриховано и изображено на рис. 1.2.
3. *Разностью* двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в A и одновременно не входят в B, т. е. $C = A \setminus B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$ (рис. 1.3). Если, в частности, A — подмножество U, то разность $U \setminus A$ обозначается $\overline{A}$ и называется *дополнением* множества A (рис. 1.4).
4. *Симметрической разностью* (или *кольцевой суммой*) множеств A и B называется множество $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (рис. 1.5).

[*] Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик.

[**] Джон Венн (1834–1923) — английский математик и логик.

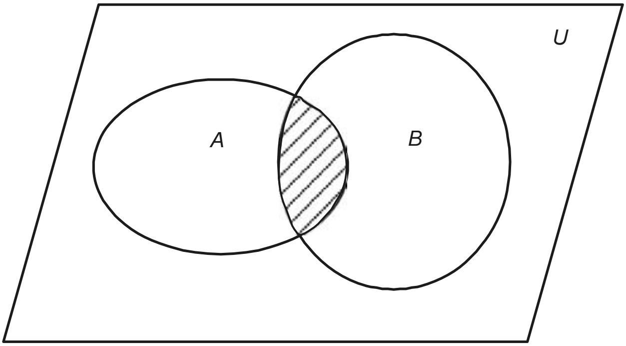

Рис. 1.2

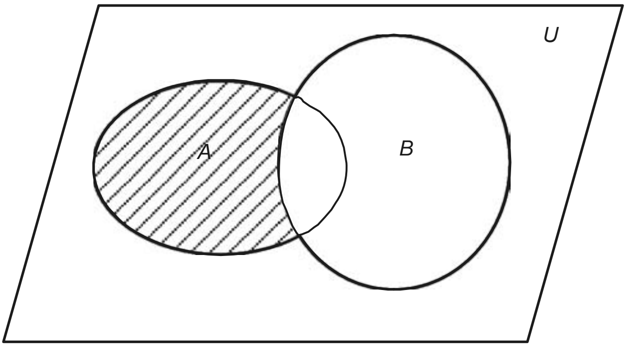

Рис. 1.3

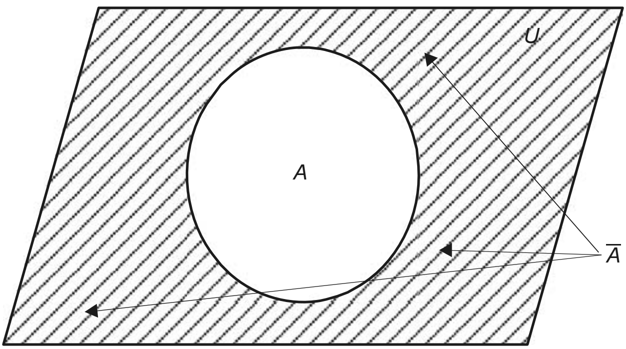

Рис. 1.4

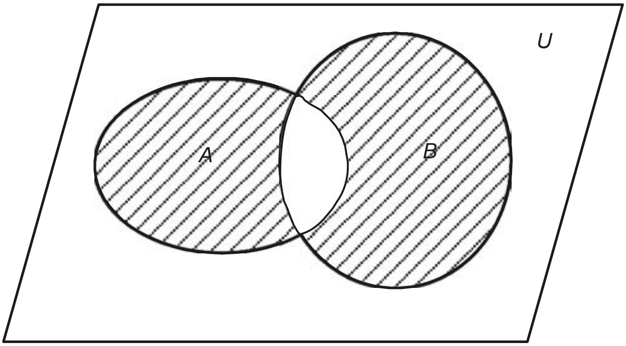

Рис. 1.5

Очевидно, что

$$C = A \oplus B = \{x \in C / ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}.$$

Если $a \in A$ и $b \in B$, то пару элементов (a, b) называют *упорядоченной парой*, причем пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

5. Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары (a, b), $a \in A$, $b \in B$, называется *прямым*, или *декартовым*, *произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. Например, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\} \to A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$,
   а $B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. Таким образом, декартово произведение не подчиняется коммутативному закону, и $A \times B = B \times A$ справедливо, если $A = B$. Произведение $A \times A$ называется *декартовым квадратом*.

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения иногда называются *законами алгебры множеств*.

Эти законы таковы:

1. *Коммутативный закон*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. *Ассоциативный закон*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. *Дистрибутивный закон*: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{cases}$
4. *Законы идемпотентности*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
   в частности $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

5. *Законы поглощения*: $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$.

6. *Законы де Моргана*[*] *(двойственности)*: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7. *Закон двойного дополнения*: $\overline{\overline{A}} = A$.

8. *Закон включения*: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

9. *Закон равенства*: $A = B \Leftrightarrow \left((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right)$.

Конечно, этим кратким перечнем количество законов алгебры множеств не исчерпывается. Другие соотношения между множествами могут быть выведены на основе вышеприведенных законов по правилам алгебры логики.

- **Пример 1.** Доказать включения $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

  Легче всего это сделать по диаграмме Эйлера—Венна (рис. 1.6–1.7).

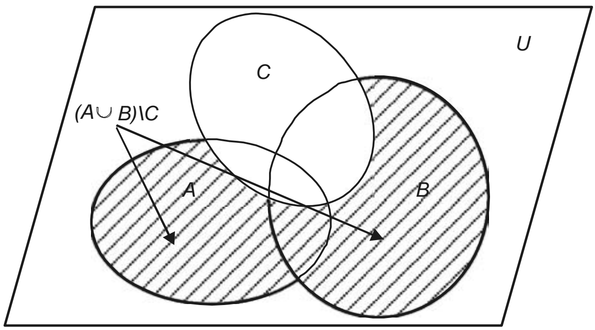

Рис. 1.6

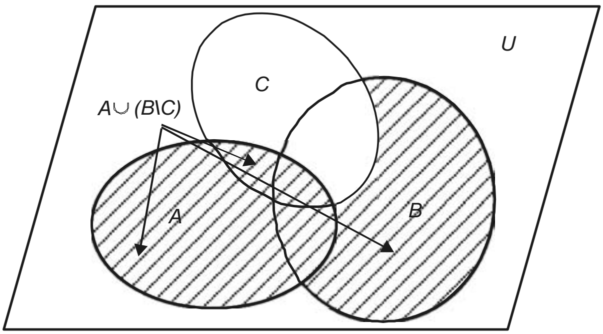

Рис. 1.7

[*] Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

- **Пример 2.** Пусть $A=\{x \in N/2 < x \le 6\}$, $B=\{x \in N/1 < x < 4\}$, $C=\left\{x \in N/x^2-4=0\right\}$. Из каких элементов состоят множества $(A \cap B) \cup (B \cup C)$, $C \times B$, $B \times C$?

  Перепишем множества A, B и C, перечислив их элементы: $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2\}$. Тогда $A \cap B=\{3\}$, $B \cup C=\{2,3\}$, $(A \cap B) \cup (B \cup C)=\{2,3\}$, $C \times B=\{(2,2),(2,3)\}$, а $B \times C=\{(2,2),(3,2)\}$.

1.2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения

Часто элементы разных множеств связаны различными соотношениями, например соотношениями порядка.

n*-местным отношением*, или n*-местным предикатом* P, на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется любое подмножество декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Обозначение n-местного отношения $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При $n=1$ отношение P называется *унарным* и является подмножеством множества A_1. *Бинарным* (или *двуместным* при $n=2$) отношением называется множество упорядоченных пар. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами*, или *компонентами*, отношения P.

Для любого множества A отношение $\mathrm{id}_A=\{(x,x)/x \in A\}$ называется *тождественным отношением*, или *диагональю*, а $U_A=A^2=A \times A=$ $=\{(x,y)/x \in A, y \in A\}$ — *полным отношением*, или *полным квадратом*.

Пусть P — некоторое бинарное отношение. Тогда *областью определения бинарного отношения* P называется множество $D=\{x/(x,y) \in P$ для некоторого $y\}$, а *областью значений* — множество $R=\{y/(x,y) \in P$ для некоторого $x\}$. Аналогично вводится еще несколько определений. *Обратным* к P отношением называется множество $P^{-1}=\{(y,x)/(x,y) \in P\}$. *Композицией бинарных отношений* $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$ называется множество $P \circ Q=\{(x,y)/x \in A, y \in C, \exists z \in B$ такой, что $(x,z) \in P, (z,y) \in Q\}$ (рис. 1.8).

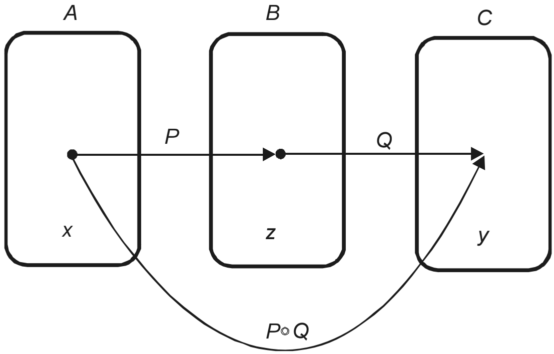

Рис. 1.8

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $\left(P^{-1}\right)^{-1} = P$.
2. $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.
3. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ — ассоциативность композиции.

- **Пример 1.** Пусть $A = \{x/x$ - арабская цифра$\}$, $P = \{(x, y)/x, y \in A, x - y = 5\}$. Отношение P можно записать в виде $P = \{(5,0), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4)\}$. Тогда для него имеем $D = \{5,6,7,8,9\}$, $R = \{0,1,2,3,4\}$, $P^{-1} = \{(0,5), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9)\}$.

- **Пример 2.** Пусть $P = \{(x, y)/x, y \in [-\pi/2, \pi/2], y \ge \sin x\}$. Найдем для этого отношения D, R, P^{-1}, $P \circ P$, $P^{-1} \circ P$, $P \circ P^{-1}$ отношения.

  Очевидно, что $D[-\pi/2, \pi/2]$, $R = [-1, \pi/2]$. По определению $P^{-1} = \{(y, x)/(x, y) \in P\} = \{(y, x)/y, x \in [-\pi/2, \pi/2], x \ge \sin y\}$. Аналогично для композиции $P \circ Q = \{(x, y)/x \in A, y \in C,\ \exists z \in B$ такой, что $(x, z) \in P, (z, y) \in Q\}$, где $P \subseteq A \times B$, а $Q \subseteq B \times C$. В нашем случае $P = A \times B$, $A = [-\pi/2, \pi/2]$, $B = \{(x, y)/\sin x \le y\}$, $Q = P = B \times C$, $C = [-\pi/2, \pi/2]$.

  Тогда $P \circ P = \{(x, y)/x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-\pi/2, \pi/2], \exists z$ такой, что $(x, z) \in \{x, z \in [-\pi/2, \pi/2],\ z \ge \sin x\}$,
  $(z, y) \in \{y, z \in [-\pi/2, \pi/2],\ y \ge \sin z\}\} = \{(x, y)/\sin x \le y\}$.

Далее таким же образом получим $P \circ P^{-1} = \{(x, y)/ x \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \in [-\pi/2, \pi/2], \exists z$ такой, что $(x, z) \in \{x, z \in [-\pi/2, \pi/2], \ z \geq \sin x\},$
$(z, y) \in \{z, y \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \geq \sin x\}\} = \{(x, y)/ x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-\pi/2, \pi/2]^2.$

$P^{-1} \circ P = \{(x, y)/ x \in \{x / \sin x \leq y\}, y \in \{y / \sin x \leq y\}, \exists z$ такой, что
$(x, z) \in \{(z, x)/ z, x \in [-\pi/2, \pi/2],$
$x \geq \sin x\}, (z, y) \in \{(z, y)/ z, y \in [-\pi/2, \pi/2],$
$y \geq \sin z\}\} = \{(x, y)/ x, y \in [-1, \pi/2]\}.$

Бинарное отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией*, или *отображением*, из множества A в множество B, если $D_f = A$, $R_f \subseteq B$ и из $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует, что $y_1 = y_2$. Область определения функции обозначается D_f, область значений — R_f. Определяются они так же, как для бинарных отношений. Если же вместо $D_f = A$ выполняется $D_f \subseteq A$, то f называется *частичной функцией.*

Говорят, что функция f задана на множестве A со значениями во множестве B и осуществляет отображение множества A во множество B. Функция f из A в B обозначается через $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Тождественное отношение $\mathrm{id}_A(x) = \{(x, x)/ x \in A\}$ является функцией $\mathrm{id}_A : A \to A$, для которой $\mathrm{id}_A(x) = x$ для всех $x \in A$.

Функция f называется *инъективной* (*разнозначной*), если отношение f^{-1} является частичной функцией, т. е. для любых элементов $x_1, x_2 \in D_f$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция $f: A \to B$ называется *функцией* A *на* B, или *сюръективной функцией*, если $R_f = B$. Для сюръективной функции для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $f(x) = y$.

Функция f называется *биективной*, если она одновременно сюръективна и инъективна. В этом случае говорят, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами A и B. Биекция $f: A \leftrightarrow A$ называется *подстановкой множества* A. Простейшим примером подстановки является функция id_A.

На рис. 1.9 показаны функции $f_j : A \to B$, $i = \overline{1,4}$. Функция f_1 сюръективна, но неинъективна, функция f_2 инъективна, но несюръективна, функция f_3 биективна и является подстановкой (если $A = B$), функция f_4 неинъективна и несюръективна.

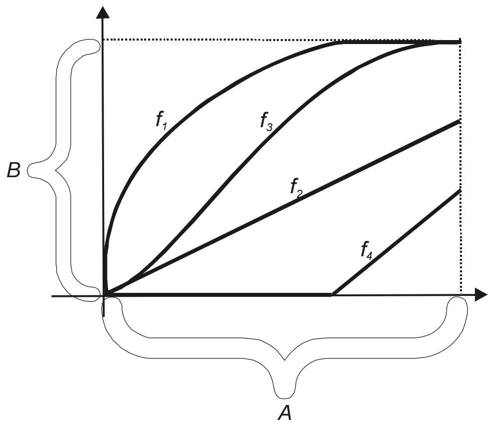

Рис. 1.9

Функции обладают несколькими легко доказываемыми свойствами:

1. Композиция двух функций есть функция, т. е. если $f : A \to B$, $g : B \to C$, то $f \circ g : A \to C$.
2. Композиция двух биективных функций есть биективная функция, если $f : A \leftrightarrow B$, $g : B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$.
3. Отображение $f : A \to B$ имеет обратное отображение $f^{-1} : B \to A$ тогда и только тогда, когда f — биекция, т. е. если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} : B \leftrightarrow A$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$.

В теории множеств важную роль играют два вида специальных бинарных отношений: эквивалентности и порядка. Их прообразами служат интуитивные понятия равенства, предшествования и предпочтения.

Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Введем матрицу $\|P\| = (p_{i,j})$ бинарного отношения P следующим образом: $p_{i,j} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$ Эта матрица содержит полную информацию о связях между элементами множеств A и B и позволяет представить эту информацию в графическом виде.

Матрица любого бинарного отношения обладает следующими свойствами:

1. Если $P,Q \subseteq A \times B$ и $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$, то $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = (p_{i,j} + q_{i,j})$; $\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = (p_{i,j} \cdot q_{i,j})$, причем сложение элементов матрицы осуществляется по правилам $0 + 0 = 0$, $1 + 1 = 1$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, а умножение почленно обычным образом, т. е. по правилам $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.
2. Если $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $\|P \circ Q\| = \|P\| \cdot \|Q\|$, и матрицы умножаются по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов при перемножении матриц находится по правилам п. 1.
3. $\|P^{-1}\| = \|P\|^T$, где $\|P^{-1}\|$ — матрица обратного отношения P^{-1}.
4. Если $P \subseteq Q$, то $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$ и $p_{i,j} \le q_{i,j}$.

- **Пример 3.** Бинарное отношение $P \subseteq A^2$, $A = \{1,2,3\}$ изображено на рис. 1.10. Его матрица имеет вид $\|P\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \|P \circ Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

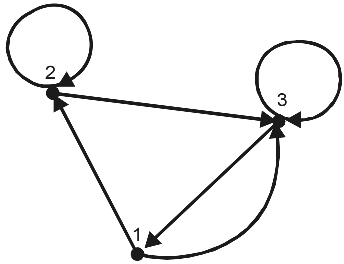

Рис. 1.10

Пусть P — бинарное отношение на множестве A, $P \subseteq A^2$. Отношение P на множестве A называется *рефлексивным*, если $\forall x \in A,\ (x,x) \in P$, т. е. $\mathrm{id}_A = P$, $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$, где звездочкой обозначены нули или единицы. Отношение P называется *иррефлексивным*, если $\forall x \in A,\ (x,x) \notin P$. Отношение P на множестве A называется *симметричным*, если для $\forall x \in P$ и для $\forall y \in P$ из условия $(x,y) \in P$ следует, что $(y,x) \in P$. Это значит, что $\|P\|^T = \|P\|$. Отношение P называется *антисимметричным*, если из условий $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$ следует, что $x = y$, т. е. $P \cap P^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$ или $\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T$. Это свойство приводит к тому, что у матрицы $\|P \cap P^{-1}\|$ все элементы вне главной диагонали будут нулевыми (на главной диагонали тоже могут быть нули). Отношение P называется *транзитивным*, если из $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$ следует, что $(x,z) \in P$, т. е. $P \circ P \subseteq P$.

- **Пример 4.** Рассмотрим все свойства следующего отношения P, если $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь на главной диагонали матрицы $\|P\|$ стоят все единицы, следовательно, P рефлексивно, т. е. $\mathrm{id}_A \subseteq P$. Матрица $\|P\|$ несимметрична, тогда несимметрично и отношение P. $\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица нужна для проверки антисимметричности. Так как не все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, то отношение P не антисимметрично. Из этого примера видно, что свойство несимметричности не совпадает со свойством антисимметричности.

Наконец, $\|P \circ P\| = \|P\| \cdot \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $P \circ P \not\subset P$, следовательно, отношение P нетранзитивно.

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение на множестве A называется *эквивалентностью* на A. Эквивалентность обозначается символами E или ~, например, xEy, $x \sim y$.

Классом эквивалентности (*смежным классом*) элемента $x \in A$ называется множество $E(x) = \left\{ y \middle/ x \sim y \right\}$. Множество классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности E называется *фактор-множеством* A по E и обозначается $A/E = \left\{ E(x) \middle/ x \in A \right\}$.

- **Пример 5.** Докажем, что на множестве $N \times N$ отношение Q является отношением эквивалентности, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$.

  Если отношение Q рефлексивно на A, то $\forall x \in Q \ (x,x) \in Q$. В нашем случае роль A играет множество $N \times N$, а роль элемента x — пара (x,y). Тогда отношение Q рефлексивно на $N \times N$, если $\forall (x,y) \in Q \ \{(x,y),(x,y)\} \in Q$. По определению $Q: a + d = b + c$, но $a + b = b + a$, следовательно, Q рефлексивно.

  Аналогично, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, то и $\{(c,d),(a,b)\} \in Q$, т. к. из $a + d = b + c$ следует, что $c + b = d + a$. Таким образом, Q симметрично.

  Наконец, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, $\{(c,d),(f,g)\} \in Q$, то $\{(a,b),(f,g)\} \in Q$, т. к. $a + d = b + c$ и $c + g = d + f$. Тогда $(a+d)+(c+g)=(b+c)+(d+f) \Rightarrow a+d+c+g =$ $= b+c+d+f \Rightarrow a+g=b+f$, т. е. Q транзитивно.

Разбиением множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств A таких, что каждый элемент множества A принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Теорема 1.1. **Фактор-множество A/E является разбиением множества A. Наоборот, если $R = \{A_i\}$ — некоторое разбиение множества A, то**

можно задать соответствующее ему отношение эквивалентности E по правилу $xEy \Leftrightarrow x, y \in A_i$ для некоторого i.

Если E — эквивалентность на конечном множестве A, то $E(x_i)$ — классы эквивалентности, а $A/E = \{E(x_1), E(x_2), \ldots, E(x_n)\}$ и $E(x_i) = \{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{m_i}^i\}$, $i = \overline{1, n}$. Если множество A пронумеровано в следующем порядке: $b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{m_1}^1, b_1^2, b_2^2, \ldots, b_{m_2}^2, \ldots, b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{m_n}^n$, то матрица отношения эквивалентности $\|E\|$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\|E\| = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\;}^{m_1} & \overbrace{\;}^{m_2} & \;\; & \overbrace{\;}^{m_n} \end{array} \\ \begin{array}{r} m_1\{ \\ m_2\{ \\ \vdots \\ m_n\{ \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

, где блоки $\boxed{1}$ состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю. Если же множество A пронумеровано произвольным образом, то матрица $\|E\| = (e_{i,j})$ приводится к блочно-диагональному виду перестановкой строк и столбцов.

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *предпорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. Очевидно, что симметричный предпорядок является отношением эквивалентности.

- **Пример 6.** Пусть $A = \{1,2,3,4\}$. Тогда отношение $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (3,2), (4,1)\}$ — предпорядок.

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве A называется *частичным порядком* на A. Частичный порядок обозначается символом $\leq$, а обратное ему отношение $\leq^{-1}$ символом $\geq$. Отношение $<$ называется *строгим порядком* и определяется таким образом: $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$. Это отношение не является частичным порядком, т. к. не удовлетворяет условию рефлексивности $x < x$.

Если во множестве A есть элементы x и y, о которых нельзя сказать, что $x \leq y$ или $y \leq x$, то такие элементы называются *несравнимыми*. Частичный порядок называется *линейным порядком*, если любые два элемента x и y из множества A сравнимы, т. е. $x \leq y$ или $y \leq x$.

Непустое множество A, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок, называется *частично (линейно) упорядоченным множеством*. Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества A называется *максимальным* (*минимальным*), если для $\forall x \in A$ из $a \le x$ $(x \le a)$ следует $a = x$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \le a$ $(a \le x)$ для всех $\forall x \in A$. Наибольший элемент обозначается $\max A$, наименьший — $\min A$. Этих элементов у множества может и не быть, например, линейно упорядоченное множество рациональных чисел $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента, наибольший элемент равен единице.

Верхней (*нижней*) *гранью подмножества* B частично упорядоченного множества A называется всякий элемент $a \in A$ такой, что $b \le a$ $(a \le b)$ для всех $b \in B$. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью подмножества* $B \subseteq A$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для B. Точная верхняя и точная нижняя грани множества $B \subseteq A$ обозначаются через $\sup B$ (супремум) и $\inf B$ (инфимум) соответственно.

Линейный порядок $\le$ на множестве A называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. В этом случае множество A называется *вполне упорядоченным*.

Рассмотрим непустое конечное частично упорядоченное множество A. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x \le y$ и не существует такого элемента z, что $x < z < y$. Если $x < y$, то существуют такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает элемент x, то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y. Такие схемы называются *диаграммами Хассе**.

- **Пример 7.** Пусть $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ — линейно упорядоченное множество с обычным отношением порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих семи. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.11. Элементы этого отношения упорядочены обычным отношением частичного порядка $\le$.

* Хельмут Хассе (1898–1979) — немецкий математик.

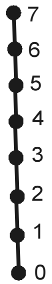

Рис. 1.11

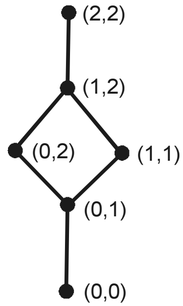

Рис. 1.12

Рассмотрим еще одно отношение: $P = \{(x, y)/ x, y \in Z,\ x - y < 1,$ $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. Элементы этого отношения — пары чисел — будут упорядочены отношением включения $(a,b) \subseteq (c,d) \Leftrightarrow (a \le c) \wedge (b \le d)$. Проверим теперь, будет ли это множество частично упорядоченным. $P = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\}$. Так как $x - x = 0 < 1$ для всех возможных x, то отношение P рефлексивно. $(1,2) \in P$ и $(2,1) \notin P$, следовательно, P несимметрично. Однако если $x - y < 1$ и $y - x < 1$, то $x = y$, иначе из $x \ne y$ следует $|x - y| \ge 1$. Таким образом, отношение P антисимметрично. Пусть теперь $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$ и $x - y < 1$ и $y - z < 1$. Тогда $x < y$ и $y < z$ и, следовательно, $x < z$, т. е. $x - z < 1$ и $(x, z) \in P$. Отношение P транзитивно, тогда P есть частично упорядоченное множество. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.12.

1.3. Практическое занятие 1. Операции над множествами. Отношения и функции

1.3.1. Доказать равенства:

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

в) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.3.2. Пусть $A = \{x \in N / 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \in N / 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in N / x^2 - 4 = 0\}$. Из каких элементов состоят множества:

а) $B \cup C$;

б) $A \cap B \cap C$;

в) $A \cup B \cup C$;

г) $B \times C$;

д) $C \times B$?

1.3.3. Доказать включения:

а) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$;

б) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

1.3.4. Пусть $A \subset U$, $B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B$.

1.3.5. Доказать:

а) если $A \subseteq B \cap C$, то $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

б) если $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq \overline{B} \cup C$;

в) если $A \cup B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

г) если $A \subseteq B \cup C$, то $A \cap \overline{B} \subseteq C$.

1.3.6. Решить систему уравнений $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ где $B \subseteq A \subseteq C$.

1.3.7. Доказать:

а) если $A \subseteq B$, то $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

б) если $A \subseteq B$, то $A \cup C \subseteq B \cup C$;

в) если $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$.

1.3.8. Решить систему уравнений $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ $B \subseteq A,\ A \cap C = \varnothing$.

1.3.9. Доказать, что система уравнений $\begin{cases} A \cap X = \varnothing, \\ B \cap \overline{X} = \varnothing \end{cases}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subseteq \overline{A}$, при этом условии решением системы является любое множество X такое, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.