

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК

Я.С. Бугров  
С.М. Никольский

ВЫСШАЯ  
МАТЕМАТИКА

3

ДРОФА

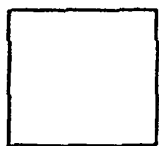


**ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

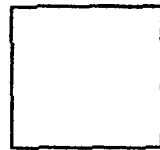
---

**СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК**

---



**Я.С. Бугров  
С.М. Никольский**



**ВЫСШАЯ  
МАТЕМАТИКА**

**3**

**Дифференциальные уравнения.  
Кратные интегралы. Ряды.  
Функции комплексного переменного**

---

Издание шестое, стереотипное

---

Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по инженерно-техническим специальностям



**ДРОФА**

---

МОСКВА · 2004

УДК 517.2(075.8)  
ББК 22.161.1я73  
Б90

### Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского института стали и сплавов (технический университет) (зав. кафедрой проф. В. А. Треногин); чл.-кор. РАН А. Ф. Леонтьев; чл.-кор. РАН Л. Д. Кудрявцев

*Серия «Высшее образование: Современный учебник»  
основана в 2001 году*

### **Бугров Я. С.**

**Б90** Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Под ред. В. А. Садовниченко. — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — (Высшее образование: Современный учебник).

ISBN 5—7107—8420—6

Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — 512 с.: ил.

ISBN 5—7107—8450—8 (т. 3)

Учебник (1-е изд. — 1980 г.) вместе с другими учебниками тех же авторов — «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» (том 1) и «Дифференциальное и интегральное исчисление» (том 2) — соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Книга содержит: обыкновенные дифференциальные уравнения, кратные интегралы, векторный анализ, ряды и интеграл Фурье, простейшие задачи из теории уравнений математической физики, функции комплексного переменного, элементы операционного исчисления.

*Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.*

УДК 517.2(075.8)  
ББК 22.161.1я73

ISBN 5—7107—8450—8 (т. 3)  
ISBN 5—7107—8420—6

© ООО «Дрофа», 2003

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	8
<b>Глава 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.....</b>	<b>11</b>
§ 1.1. Задача, приводящая к дифференциальному уравнению.....	11
§ 1.2. Общие понятия.....	12
§ 1.3. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.....	24
§ 1.4. Теорема существования решения дифференциального уравнения первого порядка.....	36
§ 1.5. Метрическое пространство.....	40
§ 1.6. Доказательство теоремы существования решения дифференциального уравнения первого порядка.....	47
§ 1.7. Метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка.....	51
§ 1.8. Уравнения, не разрешенные относительно производной.....	52
§ 1.9. Особые решения.....	56
§ 1.10. Огибающая семейства кривых.....	57
§ 1.11. Дифференциальное уравнение второго порядка.....	60
§ 1.12. Система из двух дифференциальных уравнений первого порядка.....	63
§ 1.13. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка.....	65

§ 1.14. Понижение порядка дифференциального уравнения.....	69
§ 1.15. Линейные уравнения высшего порядка.....	73
§ 1.16. Линейные однородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.....	81
§ 1.17. Метод вариации постоянных.....	87
§ 1.18. Частное решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Приложение.....	90
§ 1.19. Системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство.....	103
§ 1.20. Линейная однородная система дифференциальных уравнений.....	107
§ 1.21. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	112
§ 1.22. Сведение системы уравнений к одному уравнению.....	121
§ 1.23. Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	124
§ 1.24. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов.....	128
§ 1.25. Элементы теории устойчивости.....	134
§ 1.26. Классификация точек покоя.....	142
<b>Глава 2. Кратные интегралы.....</b>	<b>154</b>
§ 2.1. Введение.....	154
§ 2.2. Сведения из теории меры Жордана.....	161
§ 2.3. Свойства кратных интегралов. Теоремы существования.....	168
§ 2.4. Сведение кратного интеграла к повторным....	173
§ 2.5. Доказательство существования интеграла от непрерывной функции.....	185
§ 2.6. Замена переменных. Простейший случай....	187
§ 2.7. Замена переменных. Общий случай.....	189
§ 2.8. Полярная система координат в плоскости....	193
§ 2.9. Полярная система координат в пространстве.....	196
§ 2.10. Цилиндрические координаты.....	198
§ 2.11. Площадь поверхности.....	200
§ 2.12. Координаты центра масс.....	208

§ 2.13.	Несобственные интегралы.....	213
§ 2.14.	Несобственный интеграл с особенностями вдоль линии.....	218
§ 2.15.	Несобственный интеграл, зависящий от параметра.....	219
<b>Глава 3.</b>	<b>Векторный анализ.....</b>	<b>230</b>
§ 3.1.	Кусочно-гладкая ориентированная кривая....	230
§ 3.2.	Криволинейный интеграл первого рода.....	233
§ 3.3.	Интеграл от вектора вдоль кривой.....	235
§ 3.4.	Поле потенциала.....	241
§ 3.5.	Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.....	250
§ 3.6.	Ориентация плоской области.....	252
§ 3.7.	Формула Грина.....	254
§ 3.8.	Интеграл по поверхности первого рода.....	259
§ 3.9.	Ориентация поверхности.....	261
§ 3.10.	Система координат и ориентация поверх- ности.....	264
§ 3.11.	Интеграл по ориентированной плоской области.....	268
§ 3.12.	Поток вектора через ориентированную поверхность.....	271
§ 3.13.	Дивергенция. Теорема Гаусса—Остроград- ского.....	276
§ 3.14.	Соленоидальное поле.....	284
§ 3.15.	Формула Стокса.....	285
<b>Глава 4.</b>	<b>Ряды Фурье. Интеграл Фурье.....</b>	<b>291</b>
§ 4.1.	Тригонометрические ряды.....	291
§ 4.2.	Сходимость тригонометрических рядов.....	297
§ 4.3.	Ряд Фурье.....	299
§ 4.4.	Признаки сходимости рядов Фурье.....	302
§ 4.5.	Ортогональные свойства тригонометричес- ких функций.....	306
§ 4.6.	Коэффициенты Фурье.....	308
§ 4.7.	Оценка коэффициентов Фурье.....	309
§ 4.8.	Пространство функций со скалярным про- изведением.....	310
§ 4.9.	Ортогональная система функций.....	314
§ 4.10.	Полнота тригонометрических функций.....	318
§ 4.11.	Комплексная форма ряда Фурье.....	322

§ 4.12. Понятие интеграла Фурье. Повторный интеграл Фурье.....	323
§ 4.13. Косинус- и синус-преобразования Фурье.....	331
§ 4.14. Примеры.....	332
§ 4.15. Приближение интеграла Фурье.....	336
§ 4.16. Сумма Фейера.....	337
§ 4.17. Полнота систем функций в $C$ и $L_2'$ .....	343
§ 4.18. Сведения из теории кратных рядов Фурье....	346
<b>Глава 5. Уравнения математической физики.....</b>	<b>361</b>
§ 5.1. Температура тела.....	361
§ 5.2. Задача Дирихле.....	363
§ 5.3. Задача Дирихле для круга.....	364
§ 5.4. Задача Дирихле для полуплоскости.....	366
§ 5.5. Уравнение теплопроводности в стержне.....	369
§ 5.6. Теплопроводность для бесконечного стержня.....	374
§ 5.7. Малые колебания струны.....	376
§ 5.8. Колебание бесконечной струны. Формула Даламбера.....	381
§ 5.9. Колебание круглой мембраны.....	382
§ 5.10. Общая задача Штурма–Лиувилля.....	387
§ 5.11. Интеграл энергии (Дирихле).....	390
§ 5.12. Применение преобразований Фурье.....	395
<b>Глава 6. Теория функций комплексного переменного.....</b>	<b>401</b>
§ 6.1. Понятие функции комплексного переменного.....	401
§ 6.2. Производная функция комплексного переменного.....	404
§ 6.3. Условия Даламбера–Эйлера (Коши–Римана).....	411
§ 6.4. Гармонические функции.....	415
§ 6.5. Обратная функция.....	419
§ 6.6. Интегрирование функций комплексного переменного.....	425
§ 6.7. Формула Коши.....	431
§ 6.8. Интеграл типа Коши.....	434
§ 6.9. Степенной ряд.....	435
§ 6.10. Ряд Лорана.....	438

---

§ 6.11. Классификация изолированных особых точек. Вычеты.....	444
§ 6.12. Классификация особых точек на бесконечности.....	451
§ 6.13. Теорема о вычетах.....	454
§ 6.14. Вычисление интегралов при помощи вычетов.....	455
§ 6.15. Линейная функция. Дробно-линейная функция.....	462
<b>Глава 7. Операционное исчисление.....</b>	<b>468</b>
§ 7.1. Изображение Лапласа.....	468
§ 7.2. Изображение простейших функций и свойства изображений.....	470
§ 7.3. Приложения операционного исчисления.....	487
<b>Глава 8. Обобщенные функции.....</b>	<b>495</b>
§ 8.1. Понятие обобщенной функции.....	495
§ 8.2. Операции над обобщенными функциями.....	501
§ 8.3. Преобразование Фурье обобщенных функций.....	503
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>506</b>



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В комплект учебников «Высшая математика» авторов Я. С. Бугрова и С. М. Никольского, выходящий в издательстве «Дрофа» в серии «Высшее образование: Современный учебник», вошли следующие книги:

1. «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».
2. «Дифференциальное и интегральное исчисление».
3. «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

Комплект получил широкое признание как в нашей стране, так и за рубежом (все книги переведены на английский, французский, испанский и португальский языки) и был удостоен в 1984 г. премии МВ и ССО СССР и ЦИК профсоюзов работников просвещения, высшей школы и научных учреждений, а в 1987 г. — Государственной премии.

За короткий срок эти книги выдержали четыре издания и в настоящее время пользуются огромным спросом и популярностью у студентов вузов.

Данная книга является третьим томом комплекта учебников «Высшая математика». Здесь излагаются следующие разделы: «Обыкновенные диф-

ференциальные уравнения», «Кратные интегралы», «Ряды», «Функции комплексного переменного».

Материал, изложенный в учебнике, соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

В начале каждой главы сразу даются основные понятия. Формальные доказательства теорем, как правило, приводятся в конце главы или параграфа. Это позволяет читателю в случае необходимости ограничиться изучением первоначально изложенного материала.

В главах «Уравнения математической физики» и «Ряды Фурье» авторы в ряде случаев при выводе формул ограничились лишь физическими соображениями.

Главы 6 и 7, посвященные теории функций комплексного переменного и операционному исчислению, можно рассмотреть и до главы 4 «Ряды Фурье. Интеграл Фурье». Для понимания последней никаких сведений из теории функций комплексного переменного, кроме элементарных знаний о комплексных числах, не требуется. В частности, показано, как можно вычислить конкретные интегралы Фурье без привлечения операционного исчисления.

Отметим учебники, к которым полезно обращаться:

*В. Гренвиль, Н. Н. Лузин.* Дифференциальное и интегральное исчисление;

*И. И. Привалов.* Аналитическая геометрия.

Краткость и доступность изложения в них совмещаются с должной математической культурой.

Приведем книги, рекомендуемые читателям, которые хотят изучать математику более полно:

*В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.* Основы математического анализа;

*Л. Д. Кудрявцев.* Математический анализ. Т. 1—3;

*М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного;

*С. М. Никольский.* Курс математического анализа;

*Л. С. Понтрягин.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Авторы признательны первому заместителю председателя НМС по математике при Министерстве образования РФ члену-корреспонденту РАН Л. Д. Кудрявцеву и коллективу кафедры математики Московского института стали и сплавов (зав. кафедрой проф. В. А. Треногин) за доброжелательное рецензирование книги и ценные советы.

Они выражают благодарность члену-корреспонденту РАН А. Ф. Леонтьеву за полезные замечания и доброжелательное отношение к книге, профессору Е. А. Волкову, прочитавшему главу по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также А. Ф. Лапко, внимательно изучившему рукопись книги. Замеченные им недостатки были учтены при доработке.

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1.1. Задача, приводящая к дифференциальному уравнению

Пусть тело, имеющее температуру  $\theta_0$  в момент времени  $t = 0$ , помещено в среду температуры  $a$  ( $\theta_0 > a$ ). Требуется найти закон, по которому изменяется температура тела в зависимости от времени. Искомая температура есть функция от времени, которую обозначим через  $\theta(t)$ .

Из физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция  $\theta(t)$  убывающая, в силу механического смысла производной получаем

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - a], \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Соотношение (1) является математической моделью данного физического процесса. Оно называется *дифференциальным уравнением*, потому что в него наряду с неизвестной функцией  $\theta(t)$  входит и ее производная. Дифференциальное уравнение (1) может описывать и другие физические процессы. Например, радиоактивный распад также описывается уравнением (1) при  $a = 0$ .

Решение уравнения (1) легко угадать:  $\theta(t) = Ce^{-kt} + a$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Значение этой постоян-

ной можно найти из условия  $\theta(0) = \theta_0$ , из которого следует, что  $\theta_0 = C + a$ .

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-kt} + a.$$

## § 1.2. Общие понятия

1.2.1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными, выражаемую *дифференциальным уравнением*.

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка  $n$  имеет следующий вид:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $F$  есть заданная (известная) функция от  $n + 2$  переменных, обычно удовлетворяющая определенным условиям непрерывности и дифференцируемости, на которых мы сейчас останавливаться не будем, а  $y = y(x)$  — функция от  $x$  — решение дифференциального уравнения, которую надо найти.

*Решением дифференциального уравнения* порядка  $n$  называется функция  $y(x)$ , имеющая на некотором интервале  $(a, b)$  производные  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , ...,  $y^{(n)}(x)$  до порядка  $n$  включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Это значит, что выполняется тождество по  $x$ :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Каждому решению, вообще говоря, соответствует свой интервал. Конечно, если функция  $y(x)$ , заданная на интервале  $(a, b)$ , есть решение дифференциального уравнения (1), то эта функция, рассматриваемая на интервале  $(c, d)$ , принадлежащем к  $(a, b)$ , тоже есть решение уравнения (1).

В ближайших параграфах мы будем рассматривать дифференциальные уравнения, определяемые действительными функциями  $F$ , и искать их действительные решения  $y(x)$ . Термин «действительный» будем опускать, считая его

само собой разумеющимся. Впоследствии, когда мы будем изучать линейные дифференциальные уравнения, нам понадобятся также и их комплексные решения. Но об этом речь будет впереди.

Итак, мы будем называть действительные решения  $y(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , обыкновенного дифференциального уравнения просто *решениями* этого уравнения.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка по самому его определению есть функция  $y(x)$ , непрерывная на некотором интервале  $(a, b)$  вместе со своими производными до порядка  $n - 1$  включительно и имеющая, кроме того, на  $(a, b)$  производную  $y^{(n)}(x)$  порядка  $n$ . Мы будем считать, что эта последняя производная тоже непрерывна на  $(a, b)$ , не оговаривая это всякий раз особо.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка будем называть *интегральной кривой* этого уравнения (см. далее замечание в § 1.3).

Впрочем, мы будем позволять себе решение дифференциального уравнения называть интегральной кривой, а интегральную кривую решением.

Так как эта глава посвящена только обыкновенным дифференциальным уравнениям, то не будет путаницы, если слово «обыкновенный» будет иногда опускаться.

Уравнения

$$y''' + 2y' + y = \sin x, \quad (y'')^2 + 1 = 0,$$

$$y'' + (y')^2 = 0, \quad y' + ky = \cos x$$

могут служить примерами обыкновенных дифференциальных уравнений. Первое из них – третьего порядка, второе и третье – второго порядка, а четвертое – первого порядка.

Кстати заметим, что непосредственно видно, что второе уравнение не имеет вовсе действительных решений.

Существует термин – *проинтегрировать дифференциальное уравнение*. Это значит, что надо найти те или иные решения данного дифференциального уравнения. Нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с необходимостью *интегрировать* входящие в это уравнение функции.

1.2.2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Мы начнем с изучения дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Как правило, мы будем предполагать, что функция  $F(x, y, z)$  задана на некоторой области трехмерного пространства  $\Omega$  и непрерывна на  $\Omega$  вместе со своими частны-

ми производными  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial z}$ . В частности,  $\Omega$  может быть всем трехмерным пространством точек  $(x, y, z)$ .

Напомним, что *решением* или *частным решением* дифференциального уравнения (2) мы называем любую действительную непрерывно дифференцируемую функцию  $y = y(x)$ , заданную на некотором интервале  $(a, b)$ , которая удовлетворяет этому уравнению:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \quad (x \in (a, b), (x, y(x), y'(x)) \in \Omega).$$

При этом каждое решение имеет, вообще говоря, свой интервал, где оно задано.

Два алгебраических уравнения

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

называются эквивалентными на области  $\Omega$  точек  $(x, y, z)$ , если из того, что точка  $(x, y, z) \in \Omega$  удовлетворяет одному из этих уравнений, следует, что она удовлетворяет и другому.

Соответственно два дифференциальных уравнения

$$F_1(x, y, y') = 0, \quad F_2(x, y, y') = 0$$

называются эквивалентными на области  $\Omega$ , если эквивалентны на  $\Omega$  алгебраические уравнения (3).

Таким образом, в этом случае решение  $y(x)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$ , одного из дифференциальных уравнений автоматически есть решение другого.

Впрочем, эквивалентные на области  $\Omega$  дифференциальные уравнения считаются за одно и то же уравнение.

При преобразовании дифференциального уравнения надо следить, чтобы получаемое после преобразования новое дифференциальное уравнение было эквивалентным (на  $\Omega$ !) прежнему. Или уж, во всяком случае, надо замечать, какие из решений могут исчезнуть или прибавиться после преобразования.

1.2.3. Задача Коши. Отметим задачу, называемую *задачей Коши*<sup>1</sup> для дифференциального уравнения первого порядка. Она гласит: требуется найти решение  $y = y(x)$

<sup>1</sup> О. Л. Коши (1789—1857) — выдающийся французский матема-

данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0,$$

где  $(x_0, y_0)$  – заданная точка плоскости  $(x, y)$ .

Конечно, в каждом данном случае задача Коши может иметь и не иметь решение.

Если задача Коши имеет решение, то важно выяснить, единственно ли оно. Уже сейчас мы отметим важный факт, который будет доказан в § 1.6: для дифференциального уравнения первого порядка в разрешенной относительно  $y'$  форме

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ((x, y) \in G)$$

задача Коши имеет решение и притом единственное для любой точки  $(x_0, y_0)$  области  $G$  плоскости  $(x, y)$ , если заданная на этой области функция  $f(x, y)$  непрерывна

вместе со своей частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Конечно, единственность решения задачи Коши надо понимать в том смысле, что если  $y(x)$  и  $y_1(x)$  суть ее решения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию ( $y(x_0) = y_1(x_0) = y_0$ ), заданные соответственно на интервалах  $(a, b)$  и  $(c, d)$ , то  $y(x) = y_1(x)$  на пересечении этих интервалов.

**1.2.4. Примеры дифференциальных уравнений первого порядка.**

**Пример 1.** Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f(x) \quad (a < x < b), \quad (4)$$

где  $f(x)$  – непрерывная на некотором интервале  $(a, b)$  функция.

Из теории неопределенного интеграла следует, что любое решение этого дифференциального уравнения может быть записано следующим образом:

$$y = \int f(x)dx + C,$$

где справа в качестве первого слагаемого стоит неопределенный интеграл от  $f(x)$ , т. е. некоторая первообразная функция от  $f(x)$  на  $(a, b)$ :



$$\psi(x) = \int f(x)dx,$$

а в качестве второго слагаемого – произвольная постоянная  $C$  ( $-\infty < C < \infty$ ).

Итак, любое решение дифференциального уравнения (4) определяется равенством

$$y = \psi(x) + C \quad (a < x < b), \quad (5)$$

где  $\psi(x)$  – некоторая первообразная от  $f(x)$  на  $(a, b)$ , а  $C$  произвольная постоянная – параметр семейства решений.

Каждому значению параметра  $C$  соответствует отдельное (частное) решение дифференциального уравнения (4), и при этом любое решение этого уравнения может быть получено как частное решение семейства (5) при соответствующем значении  $C$ .

Если равенство (5) продифференцировать по  $x$ , то получим исходное дифференциальное уравнение (4). Благодаря этому свойству равенство (5), содержащее в себе произвольную постоянную  $C$ , называют общим интегралом дифференциального уравнения (4).

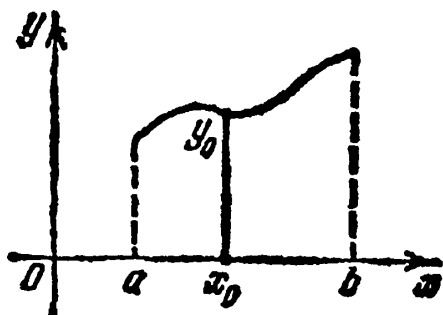


Рис. 1

Задача Коши для дифференциального уравнения (4) решается и притом единственным образом при начальном условии  $y(x_0) = y_0$ , где  $(x_0, y_0)$  – любая точка из полосы  $\{a < x < b, -\infty < y < \infty\}$  плоскости  $(x, y)$ . Чтобы решить ее, подставляем в общий интеграл (5) точку  $(x_0, y_0)$  и находим постоянную  $C$ :

$$y_0 = \psi(x_0) + C, \quad C = y_0 - \psi(x_0).$$

Отсюда получаем

$$y - y_0 = \psi(x) - \psi(x_0).$$

Это и есть решение (интегральная кривая) нашего дифференциального уравнения (4), проходящее через точку  $(x_0, y_0)$  (рис. 1).

**Пример 2.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = ky \quad (-\infty < x, y < \infty), \quad (6)$$

где  $k$  – заданная постоянная.

Легко проверить, что функция

$$y = Ce^{kx} = C \operatorname{сехр}(kx) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7)$$

при любом значении параметра  $C$  есть решение дифференциального уравнения (6). Мы не будем сейчас объяснять, как к этому семейству решений, зависящему от произвольной постоянной  $C$ , можно логически прийти (см. далее § 1.3).

Продифференцируем равенство (7) по  $x$ :

$$y' = Ck \operatorname{сехр}(kx) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (8)$$

Теперь исключим параметр  $C$  из обоих равенств (7) и (8), т. е. найдем  $C$  из одного из них и подставим в другое. Получим, очевидно, опять исходное дифференциальное уравнение (6).

В силу этого свойства равенство (7) называют общим интегралом дифференциального уравнения (6).

1.2.5. **Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.** Дадим определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2)$$

где функция  $F(x, y, z)$  и ее частные производные  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial z}$  непрерывны на области  $\Omega$  точек  $(x, y, z)$  трехмерного пространства.

*Общим интегралом дифференциального уравнения (2) называется равенство*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (9)$$

где функция  $\Phi(x, y, z)$  непрерывно дифференцируема на некоторой области точек  $(x, y, z)$  и обладает следующим свойством: если продифференцировать равенство (9) по  $x$ , считая формально, что  $y = y(x)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0, \quad (10)$$

и исключить  $C$  из уравнений (9) и (10), то получим дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению (2).

Называют еще уравнение (2) дифференциальным уравнением семейства функций (9), зависящих от параметра  $C$ .

**Пример 3.** Рассмотрим семейство функций.

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (11)$$

зависящих от произвольного параметра  $C$ .

Продифференцируем (11) по  $x$ :

$$y' = 3(x - C)^2 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (12)$$

и возведем полученное равенство в куб:

$$(y')^3 = 27(x - C)^6. \quad (13)$$

Легко видеть, что мы получили дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению (12). Но тогда из (11) и (13) следует дифференциальное уравнение

$$y'^3 - 27y^2 = 0 \quad (14)$$

Легко проверить, что любая функция (11) удовлетворяет этому уравнению. Впрочем, этот факт уже следует из того, что дифференциальное уравнение (14) есть результат исключения параметра  $C$  из равенств (11) и (13).

Мы доказали, что равенство (11), содержащее произвольный параметр  $C$ , есть общий интеграл дифференциального уравнения (14).

В дальнейшем мы будем изучать некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка и будем указывать методы их решения, которые приведут к семействам решений, зависящих от одного параметра  $C$ . Обычно эти семейства и будут общими интегралами соответствующих дифференциальных уравнений.

Возникает вопрос, содержит ли общий интеграл данного дифференциального уравнения первого порядка при любых значениях параметра  $C$  все решения этого уравнения. Вообще говоря, это не так. Но это заведомо имеет место, если общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка можно записать в разрешенном относительно  $C$  виде

$$\Psi(x, y) = C, \quad (15)$$

и при этом левая часть уравнения (15) есть непрерывно дифференцируемая функция. Именно, справедлива теорема.

**Теорема 1.** Пусть задано дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad ((x, y, y') \in \Omega), \quad (2')$$

где функция  $F(x, y, z)$  вместе с ее частными производны-

ми  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$  непрерывна на области  $\Omega$  пространства  $(x, y, z)$ , и пусть равенство (15) есть его общий интеграл, где  $\Psi(x, y)$  — непрерывно дифференцируемая на некоторой области плоскости  $(x, y)$  функция.

Тогда, если

$$y = y(x) \quad ((x, y(x), y'(x)) \in \Omega),$$

есть непрерывно дифференцируемое на  $(a, b)$  решение уравнения (15) при некотором значении  $C$ , то оно обязательно есть решение дифференциального уравнения (2'), и наоборот, всякое решение дифференциального уравнения (2') удовлетворяет уравнению (15) на интервале, где оно задано, при некоторой постоянной  $C$ .

Доказательство. Пусть  $y = y(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , есть непрерывно дифференцируемое решение уравнения (15) при постоянной  $C_0$ :

$$\Psi(x, y(x)) = C_0, \quad (x \in (a, b)).$$

Продифференцируем это тождество по  $x$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0 \quad (x \in (a, b)). \quad (16)$$

Это показывает, что функция  $y(x)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)y' = 0, \quad (17)$$

а следовательно, и решение дифференциального уравнения (2'), которое эквивалентно на  $\Omega$  уравнению (17) (согласно определению общего интеграла).

Обратно, пусть  $y(x)$ ,  $a < x < b$ , есть решение дифференциального уравнения (2'), следовательно, и уравнения (17), т. е. пусть выполняется тождество (16), которое можно записать так:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x, y(x)) \equiv 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Интегрируя его от  $x_0$  до  $x$ , где  $x_0, x \in (a, b)$ , получим

$$0 \equiv \int_{x_0}^x \frac{d}{dx} \Psi(x, y(x)) dx = \Psi(x, y(x)) - \Psi(x_0, y(x_0)) =$$

$$= \Psi(x, y(x)) - C_0$$

$$(C_0 = \Psi(x_0, y(x_0))),$$

т. е. функция  $y(x)$  удовлетворяет на  $(a, b)$  уравнению  $\Psi(x, y) = C_0$ .

Замечание к примеру 2. Общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = ky \quad (-\infty < y < \infty) \quad (6')$$

в разрешенной относительно  $C$  форме (см. (7)) имеет вид

$$ye^{-kx} = C \quad (-\infty < x, y < \infty). \quad (18)$$

Так как левая часть этого уравнения имеет непрерывные частные производные на всей плоскости  $(x, y)$ , то на основании теоремы 1 общий интеграл (18) содержит при различных постоянных  $C$  все решения дифференциального уравнения (6').

Чтобы решить задачу Коши для дифференциального уравнения (6') при начальном условии  $y(x_0) = y_0$ , подставим  $(x_0, y_0)$  в (18) и находим  $C = C_0$ :

$$y_0 e^{-kx_0} = C_0.$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$ye^{-kx} = y_0 e^{-kx_0}$$

или

$$y = y_0 e^{-k(x-x_0)} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Замечание к примеру 3. Дифференциальное уравнение в этом примере можно записать в виде

$$F(x, y, y') = 0, \quad (19)$$

где функция

$$F(x, y, y') = y'^3 - 27y^2$$

непрерывно дифференцируемая на всем пространстве  $(x, y, z)$ , которое обозначим через  $\Omega$ .

Мы знаем уже, что общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty). \quad (11)$$

Если решить уравнение (11) относительно  $C$ , то получим

$$\Psi(x, y) = C, \quad \Psi(x, y) = x - y^{1/3}. \quad (11')$$

Частная производная по  $y$  от функции  $\Psi$  не существует на оси  $y = 0$ , поэтому условие теоремы 1 не выполняется. Но тогда нельзя гарантировать, что *любое* решение дифференциального уравнения (19) входит в его общий интеграл при некотором  $C$ .

На рис. 2 изображено семейство кубических парабол (11) для различных значений  $C$ . Каждая из этих парабол есть интегральная кривая дифференциального уравнения (19). Но имеются еще и другие интегральные кривые, например кривая, изображенная на рис. 2 жирной линией:

$$y(x) = \begin{cases} (x - \alpha)^3, & x \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < x < \beta, \\ (x - \beta)^3, & \beta \leq x. \end{cases}$$

Итак, дифференциальное уравнение (19) имеет определенный на всей плоскости  $(x, y)$  общий интеграл (11), но он не содержит в себе при различных значениях  $C$  все решения этого уравнения. Имеется бесконечное множество решений, соответствующих парам чисел  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha < \beta$ , которые не получаются из семейства (11) при некотором значении  $C$ .

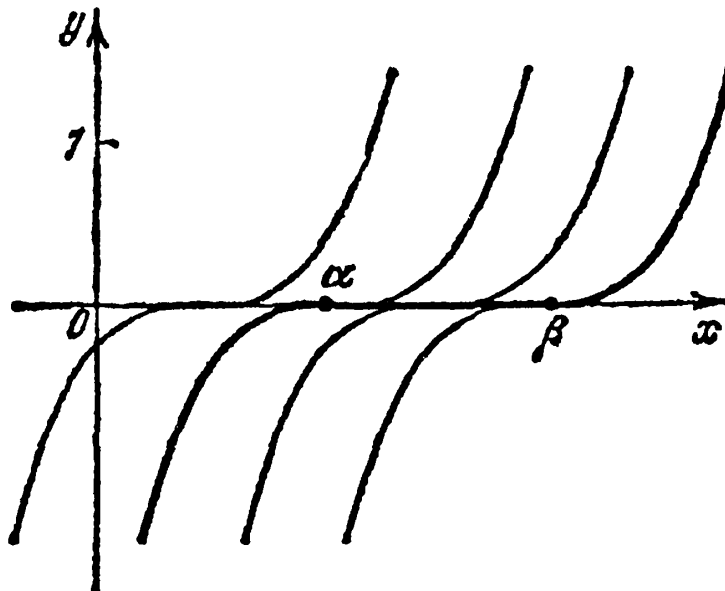


Рис. 2

Однако если дифференциальное уравнение (19) рассматривать для положительных  $y$  ( $y > 0$ ), т. е. считать, что функция  $F(x, y, z)$  задана на полупространстве  $y > 0$ , которое мы обозначим  $\Omega_+$ , то общий интеграл

$$\Psi(x, y) = x - y^{1/3} = C$$

$$(-\infty < C < \infty, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty)$$

определяется функцией  $\Psi(x, y)$ , непрерывно дифференцируемой на  $\Omega_+$ . Поэтому в данном случае применима теорема 1, и общий интеграл содержит в себе при различных  $C$  все решения дифференциального уравнения, принадлежащие к верхней полуплоскости

$$\{-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}.$$

Подобный факт имеет место и для области  $\Omega_-$  точек  $(x, y, z)$ , где  $y < 0$ .

1.2.6. Поле направлений. Отметим, что дифференциальное уравнение в разрешенном относительно производной виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (20)$$

устанавливает явную связь между координатами точки  $M = (x, y)$  и угловым коэффициентом касательной  $\frac{dy}{dx}$  к интегральной кривой в этой точке (рис. 3):

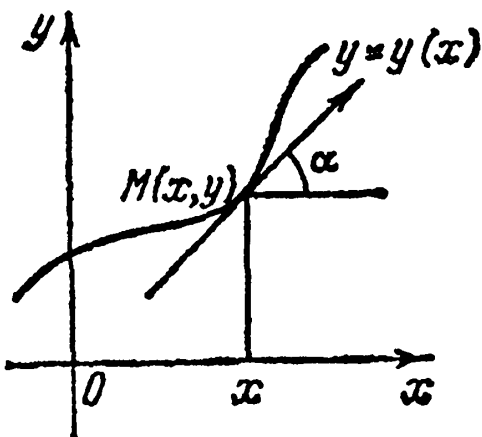


Рис. 3

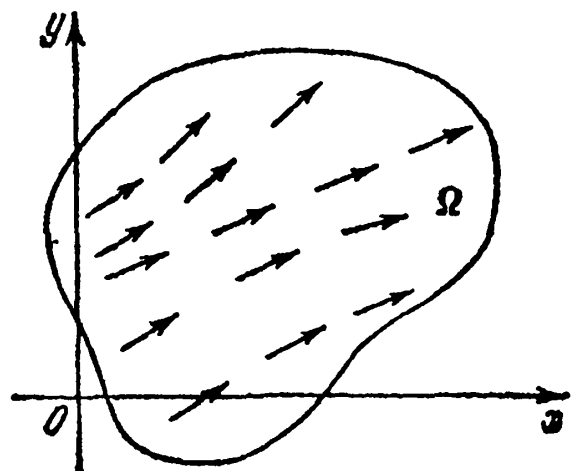


Рис. 4

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Если функция  $f(x, y)$  определена на некоторой области  $\Omega$  плоскости, то каждой точке  $M \in \Omega$  соответствует некоторое направление, угловым коэффициентом которого равен  $f(x, y)$ . Указывая это направление единичным вектором, проходящим через точку  $M$ , мы получим на  $\Omega$  поле направлений (рис. 4).

Интегральные кривые уравнения (20) суть кривые, для которых упомянутые направления являются направлениями касательных. Решить дифференциальное уравнение означает найти кривые, направления касательных к которым в каждой точке совпадают с направлением поля. Конечно, в данном случае интегральные кривые принадлежат области  $\Omega$ .

**Пример 4.**  $y' = y/x$ .

Правая часть этого уравнения определена на множестве  $\Omega$  всех точек плоскости  $(x, y)$ , кроме точек оси  $y$ . Если точки  $M = (x, y) \in \Omega$  лежат на прямой  $y = kx$ , то для них

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx}{x} = k \quad (x \neq 0),$$

т. е. поле направлений имеет вид, изображенный на рис. 5.

В данном случае направление прямой  $y = kx$  совпадает с направлением поля в каждой точке этой прямой, следовательно, интегральными кривыми являются не параллельные оси  $y$ , выходящие из нулевой точки, лучи без точки  $(0, 0)$ .

Для построения поля направлений, удобно рассматривать геометрические места точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие геометрические места точек называются *изоклинами*.

**Пример 5.**  $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\sqrt{x^2 + y^2} = k$  — уравнение изоклины, соответствующей определенному значению  $k$  ( $y' = k$ ), т. е. это окружность радиуса  $k$  (рис. 6).



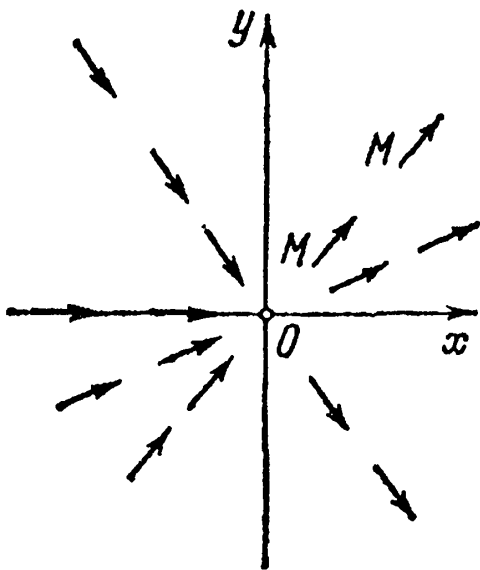


Рис. 5

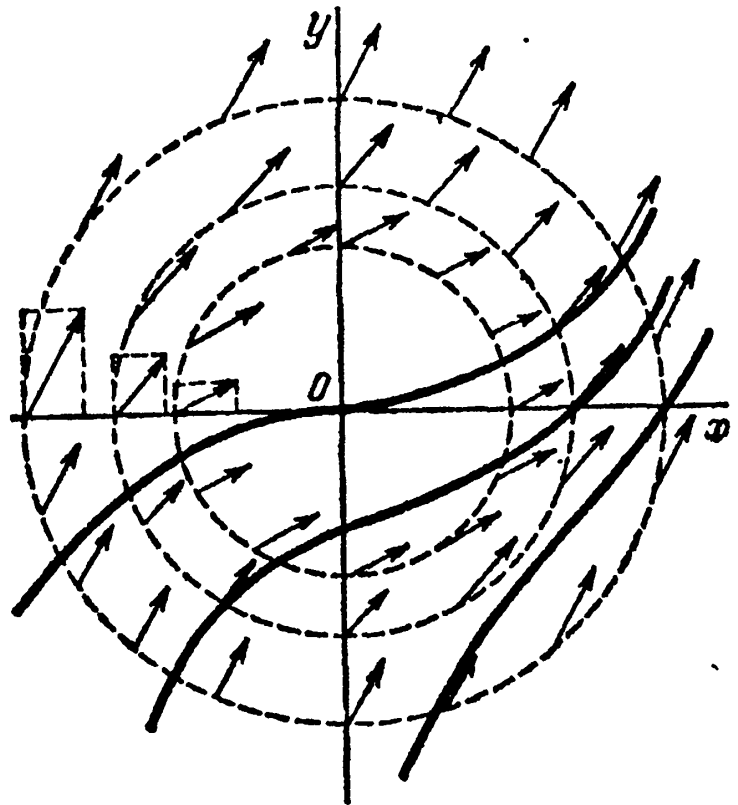


Рис. 6

Зная изоклины дифференциального уравнения, легко нарисовать эскиз интегральных кривых.

### § 1.3. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

1.3.1. Уравнение, записанное через дифференциалы. Пусть  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  – функции, непрерывные на некоторой области  $\Omega$  плоскости  $(x, y)$ .

Выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (1)$$

называют *дифференциальным уравнением первого порядка*.

На самом деле выражение (1) объединяет в себе два дифференциальных уравнения первого порядка – относительно функции  $y(x)$  и относительно функции  $x(y)$ .

В первом случае под решением уравнения (1) понимается функция  $y = y(x)$ , определенная на некотором (зависящем от нее) интервале  $(a, b)$ , имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая уравнению (1):

$$M(x, y(x))dx + N(x, y(x))y'(x)dx = 0$$

$$(x \in (a, b), (x, y(x)) \in \Omega).$$

Так как дифференциал  $dx$  от независимой переменной  $x$  не равен нулю, то в этом уравнении можно на  $dx$  сократить и получить, что  $y(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка, записанному в обычной форме:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (2)$$

Относительно решений вида  $y = y(x)$  дифференциальные уравнения (1) и (2) эквивалентны.

Аналогично рассуждая, мы получим, что относительно решений вида  $x = x(y)$  дифференциальное уравнение (1) эквивалентно следующему:

$$M(x, y) \frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (3)$$

Изучим подробнее дифференциальное уравнение (2) (относительно  $y$ ).

Пусть функция  $N(x, y)$  отлична от нуля всюду на  $\Omega$  ( $N(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ ). Тогда она в силу ее непрерывности на связном множестве  $\Omega$  либо всюду на  $\Omega$  положительна, либо всюду на  $\Omega$  отрицательна. В этом случае уравнение (2) можно записать в форме разрешенной отно-

сительно  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (2')$$

т. е. уравнения (2) и (2') эквивалентны на  $\Omega$ . Если же функция  $N(x, y)$  равна нулю в некоторых точках  $\Omega$ , то уравнения (2) и (2') будут эквивалентными только на части  $\omega$  области  $\Omega$ , где функция  $N(x, y)$  отлична от нуля.

Пусть в точке  $(x_0, y_0) \in \Omega$  функция  $N$  обращается в нуль ( $N(x_0, y_0) = 0$ ). Если при этом  $M(x_0, y_0) \neq 0$ , то уравнение (2), очевидно, не имеет решения, проходящего через эту точку, — ведь второе слагаемое в левой части (2) при  $x = x_0, y = y_0$  равно нулю, а первое по условию не равно нулю.

Если же наряду с равенством  $N(x_0, y_0) = 0$  выполняется также равенство  $M(x_0, y_0) = 0$ , то через точку  $(x_0, y_0)$  может проходить решение — одно или несколько или даже

бесконечное число решений. Мы увидим это далее из примеров.

Подобное замечание можно сделать и в отношении дифференциального уравнения (3). Надо только в этих рассуждениях поменять местами  $x$  и  $y$ , а также  $M$  и  $N$ .

Разберем еще случай, когда обе функции  $M$  и  $N$  отличны от нуля всюду на  $\Omega$ . В этом случае правая часть уравнения (2') тоже отлична от нуля всюду на  $\Omega$  и имеет один и тот же знак. Но тогда решение  $y(x)$  дифференциального уравнения (2') имеет производную  $y'(x)$  того же знака. Это показывает, что решение  $y = y(x)$  строго монотонно на том интервале  $(a, b)$ , где оно задано. Но тогда оно имеет обратную непрерывно дифференцируемую функцию  $x = x(y)$  на некотором интервале  $(c, d)$ . При этом

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{N}{M}} = -\frac{M}{N},$$

что показывает, что обратная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).

Итак, мы получили, что если обе функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  отличны от нуля всюду на  $\Omega$ , то всякое решение уравнения (1) вида  $y = y(x)$  имеет обратную функцию  $x = x(y)$ , являющуюся тоже решением этого уравнения, но вида  $x = x(y)$ .

**1.3.2. Уравнения с разделенными переменными.** Уравнение (1) называется дифференциальным уравнением первого порядка с *разделенными переменными*, если

$$M(x, y) = \varphi(x) \quad (x \in (a, b)),$$

$$N(x, y) = \psi(y) \quad (y \in (c, d)).$$

Оно имеет вид

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0. \quad (4)$$

Далее будем считать, что  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  — непрерывные функции. Пусть  $y = y(x)$  есть решение дифференциального уравнения (4) в прямоугольнике

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} a < x < b \\ c < y < d \end{array} \right\},$$

определенное на некотором интервале  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ .

Тогда имеет место тождество

$$\varphi(x)dx = -\psi[y(x)]dy(x) \quad (x \in (\alpha, \beta)),$$

откуда, интегрируя, получим

$$\int \varphi(x)dx = -\int \psi[y(x)]dy(x) + C_1 = -\int \psi(y)dy + C.$$

Здесь интегралы  $\int \varphi(x)dx$  и  $\int \psi(y)dy$  суть некоторые выбранные нами первообразные от  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$ :

$$\int \varphi(x)dx = \Phi(x) \quad (a < x < b),$$

$$\int \psi(y)dy = \Psi(y) \quad (c < y < d);$$

во втором равенстве произведена замена переменной  $y(x) = y$  в неопределенном интеграле (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 5.2); константа  $C$  зависит от решения  $y(x)$ .

Итак, любое решение  $y(x)$  нашего дифференциального уравнения в указанном прямоугольнике удовлетворяет уравнению

$$\int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy = C$$

при некоторой постоянной  $C$  или уравнению

$$\Phi(x) + \Psi(y) = C. \quad (5)$$

Левая часть равенства (5) есть функция  $F(x, y)$ , непрерывно дифференцируемая на прямоугольнике

$$\Delta = \{a < x < b, c < y < d\},$$

со свойствами

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(y).$$

Если продифференцировать формально (5) по  $x$ , считая, что  $y = y(x)$ , то получим

$$\varphi(x) + \psi(y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

т. е. исходное дифференциальное уравнение (4).

Таким образом, равенство (5) есть общий интеграл дифференциального уравнения (4) для его решений вида

$y = y(x)$ . Согласно теореме 1 §1.2 все непрерывно дифференцируемые на  $(\alpha, \beta)$  решения  $y = y(x)$  уравнения (5) при любых постоянных  $C$  являются решениями дифференциального уравнения (4) вида  $y = y(x)$  и обратно. Впрочем, обратное утверждение мы доказали непосредственно.

Рассуждая аналогично, меняя местами роль  $x$  и  $y$ , мы снова получим равенство (5), но только теперь это будет общий интеграл, содержащий всевозможные решения вида  $x = x(y)$ ,  $y \in (\gamma, \delta) \subset (c, d)$ , нашего дифференциального уравнения (4).

Таким образом, равенство (5) будет общим интегралом дифференциального уравнения (4) как для решений вида  $y = y(x)$ , так и для решений вида  $x = x(y)$ .

Пример 1.  $x^2 dx = y dy$ ,  $\Delta = \{a < x < b, c < y < d\}$ .

$$\int x^2 dx - \int y dy = C; \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C \text{ — общий интеграл.}$$

Пример 2.  $e^{x^2} dx = e^{y^2} dy$ ;  $\int e^{x^2} dx - \int e^{y^2} dy = C$ .

Эти интегралы нельзя выразить в элементарных функциях. Все же мы считаем задачу, с точки зрения теории дифференциальных уравнений, решенной.

1.3.3. Уравнения с разделяющимися переменными. Если  $M(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$ ,  $N(x, y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$ , то уравнение (1) называется уравнением с разделяющимися переменными:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0. \quad (6)$$

Для тех  $(x, y)$  для которых  $\varphi_2(x)\psi_1(y) \neq 0$ , разделим на это произведение левую и правую части (6). Тогда получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} dx + \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)} dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения находится, как в 1.3.2. Но могут быть еще решения, проходящие через точки  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяющие уравнению  $\varphi_2(x)\psi_1(y) = 0$ .

1.3.4. Однородные уравнения. Функция  $M(x, y)$  называется *однородной степени  $m$* , если для любых  $x, y$  и  $t > 0$  выполняется равенство

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y).$$

Если функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  однородные одной и той же степени  $m$ , то дифференциальное уравнение

$$Mdx + Ndy = 0 \quad (7)$$

называется *однородным*.

Его можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \\ &= -\frac{M\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)}{N\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)} = -\frac{|x|^m M\left(\pm 1, \pm \frac{y}{x}\right)}{|x|^m N\left(\pm 1, \pm \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (8)$$

где  $f$  — некоторая функция от одного переменного.

Введем вместо  $y$  новую функцию  $z$  (от  $x$ ) при помощи подстановки

$$y = x \cdot z, \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z.$$

Тогда

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

или

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Следовательно,

$$\ln \left| \frac{x}{C} \right| = \int \frac{dz}{f(z) - z} \quad (C \neq 0)$$

или

$$x = C \exp\left(\int \frac{dz}{f(z) - z}\right),$$

где  $C \neq 0$  — произвольная постоянная.

Отметим более общее уравнение, чем (8):

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^\alpha}\right). \quad (9)$$

Его можно решить подстановкой

$$y = x^\alpha z, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} z + x^\alpha \frac{dz}{dx};$$

тогда

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^\alpha \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} f(z), \quad x^\alpha \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} [f(z) - \alpha z],$$

$$\frac{dz}{f(z) - \alpha z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln \left| \frac{x}{C} \right| = \int \frac{dz}{f(z) - \alpha z} \quad (C \neq 0),$$

$$x = C \exp \int \frac{dz}{f(z) - \alpha z}, \quad (10)$$

где  $C \neq 0$  — произвольная постоянная.

**Пример 3.**  $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ .

Данное уравнение является однородным, так как функции

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad N(x, y) = xy$$

однородные степени  $m = 2$ . Сделаем замену  $y = zx$ ,  $dy = zdx + xdz$ . Тогда уравнение переписется так:

$$(x^2 + z^2x^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0$$

или

$$(1 + 2z^2)dx + zxdz = 0.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{1 + 2z^2}, \quad \ln \left| \frac{x}{C} \right| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2z^2), \quad x = \frac{C}{\sqrt[4]{1 + 2z^2}}.$$

Так как у нас  $z = y/x$ , то

$$x^4 = \frac{C^4 x^2}{x^2 + 2y^2}, \quad 2y^2 + x^2 = \frac{C^4}{x^2}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{C^4}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}.$$

Пример 4.

$$y' = Ax^\gamma + By^\nu, \quad (11)$$

$$y' = x^\gamma \left[ A + B \frac{y^\nu}{x^\gamma} \right] = x^\gamma \left[ A + B \left( \frac{y^\nu}{x^{\gamma/\nu}} \right)^\nu \right].$$

Это уравнение есть частный случай (9), если

$$\gamma + 1 = \frac{\gamma}{\nu}. \quad (12)$$

Уравнение (11) при  $\gamma = -2$  и  $\nu = 2$  (условие (12) выполнено) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = Ax^{-2} + By^2,$$

и его решение записывается по формуле (10), где

$$f(z) = A + Bz^2, \quad \alpha = \gamma + 1 = -1.$$

Полученное уравнение есть частный случай *уравнения Риккати*

$$y' = By^2 + R(x),$$

которое интегрируется в квадратурах только в исключительных случаях. Мы доказали, что при  $R(x) = Ax^{-2}$  уравнение Риккати решается в квадратурах. Отметим, что при  $R(x) = \text{const}$  уравнение Риккати является уравнением с разделяющимися переменными.

Если  $R(x) = Ax^\alpha$  и  $\alpha = \alpha_n = -\frac{4n}{2n-1}$  ( $n$  — целое), то подстановка

$$\frac{1}{\eta(\xi)} = x^2 y(x) + \frac{x}{B}, \quad \xi = x^{\alpha_n+3} \quad (n \geq 1)$$

приводит уравнение Риккати к виду



$$\eta' = -\frac{A}{\alpha_n + 3} \eta^2 - \frac{B}{\alpha_n + 3} \xi^{\alpha_n - 1}.$$

Последовательно применяя эту подстановку, можно исходное уравнение свести к случаю  $\alpha_0 = 0$  ( $R(x) = \text{const}$ ).

Если же  $n \leq -1$ , то подстановка

$$\frac{1}{y(x)} = \xi^2 \eta(\xi) + \frac{\alpha_n + 1}{A} \xi, \quad \xi = x^{-\alpha_n - 1}$$

приводит уравнение к виду

$$\eta' = -\frac{A}{\alpha_n + 1} \eta^2 + \frac{B}{\alpha_n + 1} \xi^{\alpha_n + 1}.$$

Применяя эту подстановку необходимое число раз, мы сведем уравнение Риккати к случаю  $\alpha_0 = 0$ .

Во всех других случаях уравнение Риккати не решается в квадратурах.

**Пример 5.**  $xydy - (x^4 + y^2)dx = 0$ .

Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^2}{xy} = \frac{x^4 \left( 1 + \left( \frac{y}{x^2} \right)^2 \right)}{x^3 \cdot \frac{y}{x^2}} = x \frac{1 + \left( \frac{y}{x^2} \right)^2}{\frac{y}{x^2}}.$$

Это уравнение есть частный случай уравнения (9) при  $\alpha = 2$ ,  $f(z) = (1 + z^2)/z$ .

### 1.3.5. Линейное уравнение. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (a < x < b), \quad (13)$$

где  $p(x)$ ,  $f(x)$  — непрерывные функции от  $x$  на интервале  $(a, b)$ , называется *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка. Неизвестная функция  $y(x)$  и ее производная входят в это уравнение в первой степени — линейно.

Если  $f(x) \equiv 0$ , то уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (14)$$

называется линейным *однородным*, а в связи с этим уравнение (13) называют линейным *неоднородным*.

Однородное линейное уравнение имеет решение  $y(x) \equiv 0$ . Оно является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (y \neq 0), \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx \quad (C \neq 0),$$

$$y = C \exp\left(-\int p(x)dx\right). \quad (15)$$

Если в (15) разрешить постоянной  $C$  принимать нулевое значение, то формула (15) дает и решение  $y(x) \equiv 0$ .

Формула (15) показывает, что график решения линейного однородного уравнения лежит выше оси  $Ox$ , если  $C > 0$ , или ниже оси  $Ox$ , если  $C < 0$ .

Мы пришли к формуле (15) по следующей схеме. Мы предположили, что функция  $y = y(x)$  есть решение дифференциального уравнения (14), отличное от нуля всюду на  $(a, b)$ , и пришли к тому, что оно определяется формулой (15) при некотором  $C$ . Надо иметь в виду, что интеграл  $\int p(x)dx$  обозначает некоторую первообразную функцию от  $p(x)$  на интервале  $(a, b)$ , поэтому и решение, даваемое формулой (15), определено на  $(a, b)$ . Легко проверить, что функции (15) при любом  $C$ , в том числе и при  $C = 0$ , суть решения дифференциального уравнения (14).

Остается выяснить вопрос о существовании решений нашего дифференциального уравнения, пересекающих ось  $x$ . Для этого можно воспользоваться теоремой 1 § 1.2. Разрешая (15) относительно  $C$ , получим

$$C = y \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Легко проверяется, что правая часть этого равенства есть функция от  $(x, y)$ , имеющая непрерывные частные производные на полосе  $\{-\infty < y < \infty, a < x < b\}$ , и тот факт, что если продифференцировать это равенство по  $x$ , считая, что  $y = y(x)$ , то получим дифференциальное уравнение (14). Тогда по теореме 1 § 1.2 формула (15) содержит все решения уравнения (14). Таким образом, *линейное уравнение (14) не имеет решений, пересекающих ось  $x$ .*

Уравнение (13) обычно решают *методом Бернулли*, который заключается в следующем. Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Имеем  $y' = uv' + u'v$ . Подставляя значения  $y$  и  $y'$  в (13), получим  $uv' + u'v + p(x)uv = f(x)$  или  $u(v' + p(x)v) + u'v = f(x)$ .

Подберем функцию  $v$  так, чтобы  $v' + p(x)v = 0$ . Относительно  $v(x)$  имеем линейное однородное уравнение, следовательно, по формуле (15) можем положить  $v = \exp\left(-\int p(x)dx\right)$ . При такой функции  $v$  получаем  $u'v = f(x)$ , откуда

$$du = \frac{f(x)}{v(x)} dx,$$

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + C = \int f(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + C.$$

Следовательно, общее, т. е. какое угодно, решение уравнения (13) запишется в виде

$$y = uv = C \exp\left(-\int p(x)dx\right) + \exp\left(-\int p dx\right) \int f(x) \exp\left(\int p dx\right) dx, \quad (16)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Входящие в формулу (16) интегралы обозначают произвольные, но выбранные определенно первообразные от подынтегральных функций. Удобно эти первообразные взять в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом  $x$  и нижним фиксированным пределом  $x_0$ , принадлежащим  $(a, b)$ .

Тогда формула (16) примет вид

$$y = C \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)dt\right) +$$

$$+ \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)dt\right) \int_{x_0}^x f(u) \exp\left(\int_{x_0}^u p(t)dt\right) du. \quad (16')$$

Если потребовать, чтобы при  $x = x_0$  решение обратилось в  $y_0$  ( $y(x_0) = y_0$ ), то, очевидно, получим  $y_0 = C$ .

Следовательно, решение задачи Коши ( $y(x_0) = y_0$ ) для дифференциального уравнения (13) дается формулой

$$y = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)dt\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)dt\right) \int_{x_0}^x f(u) \exp\left(-\int_{x_0}^u p(t)dt\right) du. \quad (16'')$$

Формула (16) показывает, что *общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения* (получающегося из (16) при  $C = 0$ ).

Мы рекомендуем не применять формально формулу (16), а в каждом примере повторять все выкладки.

**Пример 6.** Решить уравнение  $y' - y = \sin x$ .

Здесь  $p(x) = -1$ ,  $f(x) = \sin x$ . Положим  $y = u \cdot v$ ,

$$y' = u'v + uv', \quad uv' + u'v - uv = \sin x,$$

$$u(v' - v) + u'v = \sin x, \quad v' - v = 0, \quad v = \exp \int dx = e^x,$$

$$u'e^x = \sin x, \quad u' = e^{-x} \sin x, \quad u = \int e^{-x} \sin x dx + C;$$

$$y = e^x \int e^{-x} \sin x dx + C e^x.$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$y = C e^x - \frac{1}{2} (\cos x + \sin x).$$

**З а м е ч а н и е.** Уравнение (13) можно решать также *методом вариации произвольной постоянной*. Если  $C$  — постоянная, то формула (15) дает решение однородного уравнения. Будем считать  $C$  — функцией от  $x$  и подберем ее

так, чтобы выражение  $y = C(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)$  было решением (13). Но это тот же метод Бернулли при  $u = C(x)$ ,  $v = \exp\left(-\int p(x)dx\right)$ .

1.3.6. Уравнение Бернулли<sup>1</sup>:

$$y' + p(x)y = y^\alpha f(x), \quad (17)$$

где  $\alpha$  – любое вещественное число.

Если  $\alpha$  равно нулю или единице, то мы получим линейное дифференциальное уравнение. Если же  $\alpha \neq 0, 1$ , то замена  $z = y^{1-\alpha}$  приводит нас к линейному уравнению относительно функции  $z(x)$ .

Уравнение Бернулли можно сразу решать методом Бернулли, полагая  $y = u(x) \cdot v(x)$ . Отметим, что при  $\alpha > 0$  функция  $y(x) \equiv 0$  является решением уравнения Бернулли.

## § 1.4. Теорема существования решения дифференциального уравнения первого порядка

Класс дифференциальных уравнений, которые мы можем эффективно решить, весьма узок. Например, решение простого на первый взгляд дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

оказывается, не может быть сведено даже к квадратурам (интегралам). Поэтому в большинстве случаев приходится решать дифференциальные уравнения приближенно.

Но прежде чем применять какой-либо приближенный метод, надо знать, существует ли на самом деле решение дифференциального уравнения. Очень важно также знать заранее, единственно ли оно.

Ниже формулируются условия, которые гарантируют существование и единственность решения дифференциального уравнения первого порядка

<sup>1</sup> Я. Бернулли (1654–1705) – выдающийся швейцарский мате-

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

при начальном условии

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике

$$D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

и имеет на нем ограниченную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , удовлетворяющую неравенству

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N. \quad (3)$$

Тогда на отрезке  $\sigma = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , где

$$\delta < \min \left\{ a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|, \quad (4)$$

существует и притом единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2).

При этом выполняется неравенство

$$|y(x) - y_0| \leq b \quad (\forall x \in \sigma).$$

Решение  $y(x)$  непрерывно дифференцируемо на  $\sigma$ . А если  $f(x, y)$  на самом деле имеет непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$  порядка  $r$ , то  $y(x)$  имеет на  $\sigma$  непрерывные производные до порядка  $r + 1$  включительно.

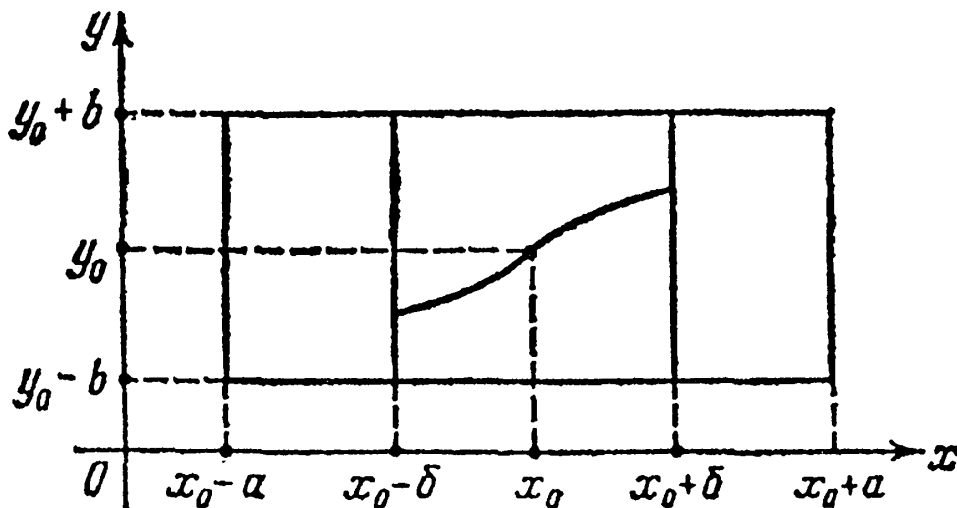


Рис. 7

На рис. 7 в плоскости  $(x, y)$  изображен прямоугольник  $D$  и принадлежащий к нему прямоугольник

$$D_1 = \{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}.$$

Теорема утверждает, что если на прямоугольнике  $D$  функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет ограниченную част-

ную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , удовлетворяющую неравенству (3),

то через точку  $(x_0, y_0)$  проходит единственная интегральная кривая  $y = y(x)$ , определенная для всех значений  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Она полностью принадлежит к прямоугольнику  $D_1$ . Число  $\delta$  удовлетворяет соотношениям (4).

Подчеркнем, что теорема 1 гарантирует существование определенного отрезка

$$\sigma = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

на котором заведомо существует решение

$$y = y(x)$$

уравнения (1), проходящее через точку  $(x_0, y_0)$ .

Если бы нам понадобилось найти это решение приближенно, то при наличии указанной информации мы организовали бы нахождение приближенного решения именно на этом отрезке  $\sigma$ , потому что нельзя ручаться, что указанное решение определено вне  $\sigma$ .

Теорема 1 будет доказана в § 1.6, а сейчас мы рассмотрим

**Пример.** Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \tag{5}$$

есть частный случай дифференциального уравнения (1).

Правая его часть не зависит от  $x$ . В данном случае функция  $f(x, y)$  равна  $-y^2$  при любом  $x$ .

Так как функция  $-y^2$  при любом  $y$  непрерывна вместе со своей производной по  $y$ , то определяемая ею функция

$f(x, y)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y}$  на всей плоскости  $(x, y)$ . Поэтому, не решая уравнение (5), можно заключить на основании теоремы существования,

что через любую точку  $(x_0, y_0)$  проходит и притом единственная интегральная кривая уравнения (5).

Пусть  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 1$ . Зададим произвольный прямоугольник

$$D = \{3 - a \leq x \leq 3 + a, 1 - b \leq y \leq 1 + b\} \quad (0 < a, b).$$

Для него

$$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)| = \max_{y \in [1-b, 1+b]} |-y^2| = \max_{1-b \leq y \leq 1+b} y^2 = (1+b)^2;$$

$$N = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_{1-b \leq y \leq 1+b} |-2y| = 2(1+b).$$

Следовательно,

$$\delta < \min \left\{ a, \frac{1}{2(1+b)}, \frac{b}{(1+b)^2} \right\} < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Уравнение (5) легко решается. Общий его интеграл в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ) и в нижней полуплоскости ( $y < 0$ ) определяется равенством

$$y = \frac{1}{x - C}. \quad (7)$$

Имеется еще одно решение  $y \equiv 0$ , но оно нас не будет интересовать.

Среди решений (7) выберем то, которое проходит через точку  $(3, 1)$ . Очевидно, это есть решение

$$y = \frac{1}{x - 2}.$$

Его график изображен на рис. 8. Мы видим, что интегральная кривая уравнения (5), проходящая через точку  $A = (3, 1)$ , уходит в бесконечность при  $x \rightarrow 2$ .

Наибольший интервал с центром в точке  $x = 3$ , на котором определена наша интегральная кривая, есть интервал  $(2, 4)$ . Соотношение (6), полученное из общей тео-

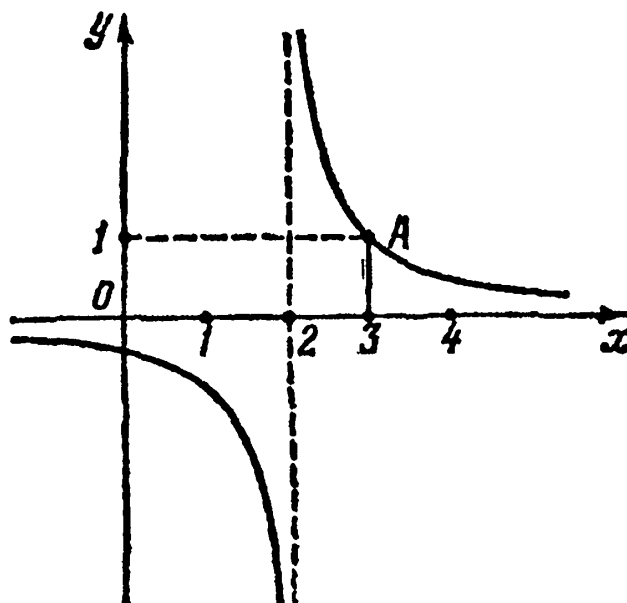


Рис. 8



ремы существования, дает несколько меньший интервал.

Теорема существования решения дифференциального уравнения будет доказана из общих соображений, относящихся к теории метрических пространств. Следующий параграф посвящен этой теории.

## § 1.5. Метрическое пространство

1.5.1. Понятие метрического пространства. Пусть  $M$  – множество элементов  $x, y, z, \dots$  произвольной природы.

Множество  $M$  называется *метрическим пространством*, если любой паре его элементов поставлено в соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , называемое *расстоянием* между элементами  $x$  и  $y$ , удовлетворяющее следующим свойствам (*аксиомам расстояния*):

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  ( $\forall x, y, z \in M$ ).

Аксиома 3) обычно называется *неравенством треугольника*. Функцию  $\rho(x, y)$  от двух аргументов  $x, y$  будем называть еще *метрикой* пространства  $M$ .

Легко видеть, что  $n$ -мерное пространство  $R_n$  с метрикой

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , является метрическим пространством.

Множество  $C[a, b]$  всех непрерывных функций, заданных на  $[a, b]$ , будет метрическим пространством, если метрику ввести по формуле

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|. \quad (1)$$

Аксиомы расстояния легко проверяются.

В дальнейшем выражение  $\{x^n\}$  будет обозначать некоторую последовательность элементов  $x^n \in M$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Таким образом,  $x^n$  обозначает элемент, имеющий номер  $n$ , а не степень элемента  $x$ .

Элемент  $x^0 \in M$  есть предел  $\{x^n\}$ , если

$$\rho(x^n, x^0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Последовательность  $\{x^n\}$  в этом случае называется *сходящейся*.

Последовательность  $\{x^n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что

$$\rho(x^m, x^n) < \varepsilon$$

при  $m, n > N$ .

Если последовательность  $\{x^n\}$  сходится к  $x^0 \in M$ , то она фундаментальная. В самом деле, из сходимости  $\{x^n\}$  к  $x^0$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $N$  такое, что  $\rho(x^n, x^0) < \varepsilon, \forall n > N$ . Поэтому на основании неравенства треугольника

$$\rho(x^n, x^m) \leq \rho(x^n, x^0) + \rho(x^0, x^m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

при  $m, n > N$ .

Обратное утверждение не всегда верно. Например, если  $M = (0, 1)$  есть интервал  $0 < x < 1$  и  $\rho(x, y) = |x - y|$ , то  $\{1/n\}$  — фундаментальная последовательность. Но она не сходится к элементу пространства  $M$  (она сходится к нулю, который не принадлежит  $M$ ).

**1.5.2. Полное метрическое пространство.** Метрическое пространство  $M$  называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства.

Мы знаем, что одномерное пространство  $R_1$  (чисел) полно (критерий Коши!). Можно доказать, что и пространство  $R_n$  полно при  $\forall n \geq 1$ .

**Теорема 1.** *Пространство  $C[a, b]$  полное.*

**Доказательство.** Пусть элементы этого пространства  $\{f_n(t)\}$  образуют фундаментальную последовательность в смысле метрики (1): для всякого  $\varepsilon > 0 \exists N$  такое, что

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

при  $m, n > N$ .

Из (2) следует, что при фиксированном  $t \in [a, b]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad (n, m > N). \quad (3)$$

Последнее означает, что числовая последовательность  $\{f_n(t)\}$  фундаментальна, поэтому на основании критерия Коши она сходится к некоторому действительному числу, которое мы обозначаем  $f(t)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \quad (\forall t \in [a, b]). \quad (4)$$

Переходя к пределу в неравенстве (3) при  $m \rightarrow \infty$ , получаем

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (n > N, \forall t \in [a, b]). \quad (5)$$

Отсюда

$$\sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (n > N). \quad (6)$$

Это показывает, что последовательность  $\{f_n(t)\}$  сходится *равномерно* к  $f(t)$  на  $[a, b]$ , и так как функции  $f_n(t)$  непрерывны на  $[a, b]$ , то и предельная функция  $f(t)$  непрерывна на  $[a, b]$ <sup>1</sup>, т. е.  $f(t) \in [a, b]$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** В неравенстве (6) теперь символ  $\sup$  можно заменить на  $\max$ .

**1.5.3. Принцип сжатых отображений.** Пусть в полном метрическом пространстве  $M$  задан оператор (функция), отображающий  $M$  в себя,

$$z = Fx \quad (x \in M, z \in M).$$

Оператор  $F$  будем называть *сжимающим*, если

$$\rho(Fx, Fy) \leq \alpha \rho(x, y), \quad \forall x, y \in M, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

где число  $\alpha$  не зависит от  $x, y$ .

Элементы  $x$  метрического пространства  $M$  будем также называть *точками* этого пространства.

Точка  $x \in M$  называется *неподвижной точкой* оператора  $F$ , если  $Fx = x$ .

Оператор  $F$  будем называть *непрерывным* в точке  $x^0$ , если

$$\lim_{x^n \rightarrow x^0} Fx^n = Fx^0$$

(т. е.  $\rho(Fx^n, Fx^0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall x^n \rightarrow x^0$ ).

Легко видеть, что сжимающий оператор всегда непрерывен в любой точке  $x^0 \in M$ . Ведь, если  $\rho(x^n, x^0) \rightarrow 0$ , то

$$\rho(Fx^n, Fx^0) \leq \alpha \rho(x^n, x^0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Теорема 2.** *Если сжимающий оператор  $F$  отображает полное метрическое пространство  $M$  в себя, то существует единственная неподвижная точка этого оператора.*

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.8, теорема 2.

Эту теорему называют *принципом сжатых отображений*.

**Доказательство.** Докажем, что двух неподвижных точек быть не может. Пусть  $x^1, x^2$  — неподвижные точки:  $Fx^1 = x^1, Fx^2 = x^2$ . Тогда

$$\rho(x^1, x^2) = \rho(Fx^1, Fx^2) \leq \alpha \rho(x^1, x^2) \quad (\alpha < 1). \quad (7)$$

Если предположить, что  $\rho(x^1, x^2) > 0$ , то из (7) получаем  $\alpha \geq 1$ , чего быть не может. Значит,  $\rho(x^1, x^2) = 0$  и  $x^1 = x^2$ .

Переходим к доказательству существования неподвижной точки.

Пусть  $x^0$  — любая точка пространства  $M$ . Составим последовательность элементов:

$$x^0, x^1 = Fx^0, x^2 = Fx^1, \dots, x^n = Fx^{n-1}, \dots$$

Эту последовательность будем называть *итерационной*, порожденной оператором  $F$ . Покажем, что эта последовательность фундаментальна. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(x^n, x^{n-1}) &= \rho(Fx^{n-1}, Fx^{n-2}) \leq \alpha \rho(x^{n-1}, x^{n-2}) \leq \\ &\leq \alpha^2 \rho(x^{n-2}, x^{n-3}) \leq \dots \leq \alpha^{n-1} \rho(x^1, x^0) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее на основании неравенства треугольника и (8) получаем ( $n > m$ )

$$\begin{aligned} \rho(x^n, x^m) &\leq \rho(x^n, x^{n-1}) + \rho(x^{n-1}, x^{n-2}) + \dots + \rho(x^{m+1}, x^m) \leq \\ &\leq [\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^m] \rho(x^1, x^0). \end{aligned}$$

Так как  $0 \leq \alpha < 1$ , то при любом  $n$  и  $m > N$

$$\rho(x^n, x^m) \leq [\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots] \rho(x^1, x^0) = \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \rho(x^1, x^0) < \varepsilon,$$

если  $N$  достаточно велико.

Итак, последовательность  $\{x^n\}$  фундаментальна, а так как пространство  $M$  полное, то она сходится к некоторому элементу  $\bar{x}$  этого пространства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \bar{x} \in M.$$

Докажем, что  $\bar{x}$  — неподвижная точка:

$$\begin{aligned} \rho(F\bar{x}, \bar{x}) &\leq \rho(F\bar{x}, x^n) + \rho(x^n, \bar{x}) = \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) + \rho(x^n, \bar{x}) \leq \\ &\leq \alpha \rho(\bar{x}, x^{n-1}) + \rho(x^n, \bar{x}) < \varepsilon \end{aligned}$$

при  $n > N = N(\varepsilon)$ .

Таким образом,  $\rho(F\bar{x}, \bar{x}) = 0$ , и по первой аксиоме расстояния заключаем, что  $F\bar{x} = \bar{x}$ , т. е.  $\bar{x}$  — неподвижная точка. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Используя тот факт, что  $\bar{x}$  – неподвижная точка, получаем

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, x^n) &= \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) \leq \alpha\rho(\bar{x}, x^{n-1}) = \alpha\rho(F\bar{x}, Fx^{n-2}) \leq \\ &\leq \alpha^2\rho(\bar{x}, x^{n-2}) \leq \dots \leq \alpha^n\rho(\bar{x}, x^0). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leq \rho(x^n, x^{n+1}) + \rho(x^{n+1}, \bar{x}) \leq \alpha\rho(x^{n-1}, x^n) + \alpha\rho(x^n, \bar{x}),$$

откуда

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{n-1}, x^n) \quad (0 \leq \alpha < 1). \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) показывают, что  $x^n$  является приближенным значением неподвижной точки с погрешностью,

не превышающей  $\alpha^n\rho(\bar{x}, x^0)$  и  $\frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{n-1}, x^n)$ .

Обратим внимание на формулу (10), которая дает оценку расстояния между  $x^n$  и  $\bar{x}$  через расстояние между двумя соседними точками  $x^n$  и  $x^{n-1}$  итерационной последовательности. Взяв  $x^n$  за приближенное значение  $\bar{x}$ , мы гарантируем, что погрешность приближения меньше правой части (10).

**1.5.4. Приближенное значение корня функции.** Пусть функция  $f(x)$  имеет корень (нуль) на  $[a, b]$ . Будем предполагать, что  $f$  имеет производные первого и второго порядков и  $f'(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ , т. е.  $f(x)$  монотонна на этом сегменте. Это говорит о том, что на  $[a, b]$  имеется один корень функции  $f$ .

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = x + k(x) \cdot f(x),$$

где  $k(x)$  – некоторая непрерывно дифференцируемая функция, не равная нулю. Ясно, что неподвижная точка  $\bar{x}$  функции  $F$  является нулем  $f$  и обратно.

Поэтому, если функция  $F$  отображает  $[a, b]$  в  $[a, b]$  и является сжимающей на  $[a, b]$ , то итерационная последовательность  $x_n = F(x_{n-1})$  сходится к неподвижной точке  $F$  (т. е. к корню  $f$ ), а  $x_n$  можно взять за приближенное значение корня. При различных  $k(x)$  мы получим различные приближенные методы вычисления корня функции  $f(x)$ .

Рассмотрим конкретную функцию  $f(x) = x^3 + x - 1$  и поставим задачу о приближенном вычислении корня этой функции с погрешностью 0,01. Имеем  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ . Следовательно, на  $[0, 1]$  имеется только один корень  $f(x)$ . Положим  $k(x) = -1/f'(x) < 0$ .

Тогда

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}.$$

Выясним, будет ли эта функция сжимающей. По теореме Лагранжа получаем

$$\rho(F(x), F(y)) = |F(x) - F(y)| = |F'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \alpha \rho(x, y),$$

где

$$\alpha = \max_x |F'(x)| = \max_x \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \max_x \left| \frac{(x^3 + x - 1)6x}{(3x^2 + 1)^2} \right|.$$

Для отрезка  $[1/2, 3/4] \subset [0, 1]$

$$\alpha = \max_{1/2 \leq x \leq 3/4} |F'(x)| = |F'(1/2)| = \frac{18}{49} < 1$$

и значения функции  $F$  не выходят за пределы  $[1/2, 3/4]$ :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1} \leq \frac{3}{4} \quad \left( x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right).$$

Таким образом, на  $[1/2, 3/4]$ , функция  $F(x)$  сжимающая. Пусть  $x_0 = 11/16 \in [1/2, 3/4]$ , тогда  $x_1 = F(x_0) = 3379/4952$  и

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq \frac{18}{31} \left| \frac{3379}{4952} - \frac{11}{16} \right| = \frac{18 \cdot 51}{31 \cdot 2 \cdot 4952} < \frac{1}{300} < 0,01. \end{aligned}$$

На основании (10)  $x_1$  можно взять за приближенное значение корня функции  $f(x)$  с погрешностью 0,01 (на самом деле с погрешностью 0,003).

**1.5.5. Метод Ньютона.** Приближенный метод вычисления корня функции  $f(x)$  ( $x_n \approx \bar{x}$ ) при  $k(x) = -1/f'(x)$

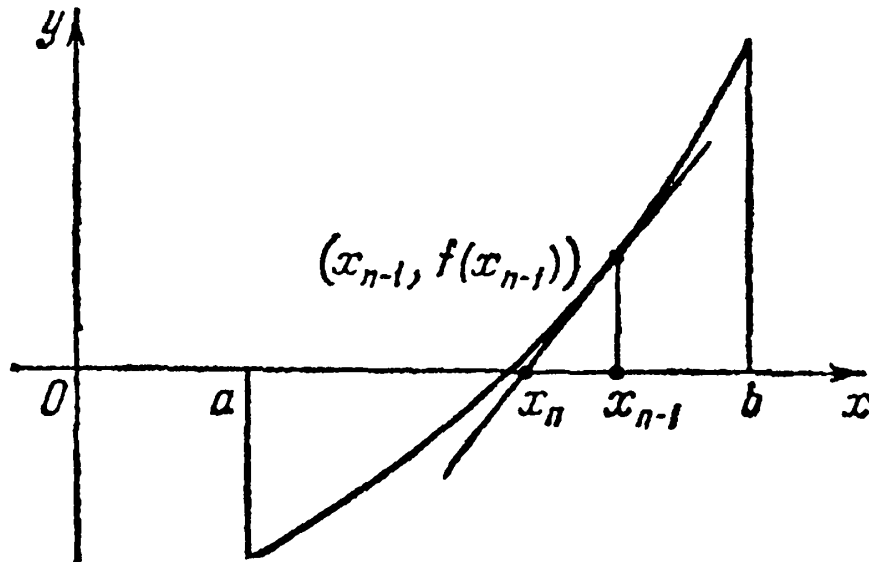


Рис. 9

носит название *метода Ньютона* или *метода касательных*. Элементы итерационной последовательности  $\{x_n\}$  можно получить из геометрических соображений.

Если  $x_{n-1} \in [a, b]$  уже определено, то для получения  $x_n$  в точке  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  графика функции  $f$  проводим касательную. Точку пересечения этой касательной с осью  $x$  берем за  $x_n$  (рис. 9). Уравнение касательной имеет вид

$$Y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Полагая в этом равенстве  $Y = 0$ , найдем решение  $x = x_n$ , где

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, числа  $x_n$  являются элементами итерационной последовательности для функции  $F(x) = x - (f(x)/f'(x))$ .

**Задача 1.** Функция  $F(x) = x^2$  отображает  $R_1$  в себя и имеет две неподвижные точки  $x = 0$  и  $x = 1$ . Почему?

**Задача 2.** Оператор зеркального отображения плоскости  $x_1 O x_2$  относительно оси  $Ox_1$  имеет вид  $F\mathbf{x} = (x_1, -x_2)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Какие точки плоскости являются неподвижными для этого оператора?

## § 1.6. Доказательство теоремы существования решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть задано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

где функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике

$$D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

и имеет ограниченную частную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , удовлетво-

ряющую неравенству  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$ .

Нам надо доказать, что на отрезке  $\sigma = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  существует и притом единственное решение  $y = y(x)$  дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

где

$$\delta < \min \left\{ a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|. \quad (3)$$

При этом  $y(x)$  непрерывно дифференцируема на  $\sigma$ . Дифференциальное уравнение (1) с условием (2) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4)$$

В самом деле, пусть непрерывная функция  $y(x)$  является решением (4), тогда, дифференцируя тождество (4), получим

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \text{ и, очевидно, } y(x_0) = y_0.$$

Таким образом, функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению (1) с условием (2).

Обратно, пусть  $y(x)$  является решением (1):



$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (x_0 \leq t \leq x); \quad y(x_0) = y_0.$$

Тогда, интегрируя это тождество в пределах от  $x_0$  до  $x$ , получим

$$\int_{x_0}^x \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

или

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

т. е.  $y(x)$  является решением (4).

В дальнейшем мы будем исследовать уравнение (4).

Обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество непрерывных функций  $y = y(x)$ , заданных на отрезке  $\sigma = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  и удовлетворяющих на нем неравенству  $|y(x) - y_0| \leq b$ .

В  $\mathfrak{M}$  введем расстояние

$$\rho(y, z) = \max_{x \in \sigma} |y(x) - z(x)| \quad (y, z \in \mathfrak{M}).$$

Таким образом,  $\mathfrak{M}$  есть метрическое пространство. Это полное пространство. В самом деле, если последовательность функций  $y_n \in \mathfrak{M}$  удовлетворяет в смысле введенной метрики условию Коши (является фундаментальной последовательностью), то, как мы знаем, эта последовательность сходится равномерно на отрезке  $\sigma$  к некоторой непрерывной на этом отрезке функции  $y = y(x)$  (см. § 1.5).

Для функций  $y_n = y_n(x)$  выполняется неравенство

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \quad (x \in \sigma, n = 1, 2, \dots),$$

которое после перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$  сохраняется:

$$|y(x) - y_0| \leq b.$$

Но тогда  $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ , что показывает, что  $\mathfrak{M}$  — полное пространство.

Равенство

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

приводит в соответствие каждой функции  $y = y(x) \in \mathfrak{M}$  некоторую функцию  $z = z(x) \in \mathfrak{M}$ . В самом деле, есть  $y \in \mathfrak{M}$ , то  $y = y(t)$  есть непрерывная функция, график которой принадлежит к прямоугольнику

$$D_1 = \{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

поэтому в силу непрерывности  $f(x, y)$  на  $D_1$  правая часть равенства (5) есть непрерывная функция от  $x$ , т. е.  $z = z(x)$  есть непрерывная функция на  $\sigma$ . Далее

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta < M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

что показывает, что  $z \in \mathfrak{M}$ .

Итак, мы можем считать, что равенство (5) определяет оператор

$$z = Fy \quad (y \in \mathfrak{M}, z \in \mathfrak{M}),$$

отображающий полное пространство  $\mathfrak{M}$  в полное пространство  $\mathfrak{M}$ . Этот оператор сжимающий, потому что, если

$$z_1 = Fy_1, \quad z_2 = Fy_2 \quad (y_1, y_2 \in \mathfrak{M}),$$

то

$$\begin{aligned} |z_1(x) - z_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x [y_1(t) - y_2(t)] f'_y(t, \lambda(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \rho(y_1, y_2) N dt \right| \leq \rho(y_1, y_2) \delta N = \\ &= \alpha \rho(y_1, y_2), \end{aligned} \tag{6}$$

где число  $\alpha = \delta N$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq \alpha < 1$ , потому что по условию  $\delta < 1/N$ . Из (6) следует, что

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in \sigma} |z_1(x) - z_2(x)| \leq \alpha \rho(y_1, y_2).$$

Но тогда, как мы знаем, в  $\mathfrak{M}$  (см. § 1.5) существует единственная функция (неподвижная точка)  $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ , для которой

$$y = Fy,$$

иначе говоря, которая удовлетворяет уравнению (4), а следовательно, уравнению (1) и условию (2).

Применяя метод итераций, можно получить приближенное решение уравнения (1):

$$y_n(x) = Fy_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где  $y_0(x) \equiv y_0 \in \mathfrak{M}$ .

На основании формулы (10) § 1.5 оценка приближения имеет вид

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{N\delta}{1 - N\delta} \max_{x \in \sigma} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|.$$

Существуют и другие приближенные методы решения задачи Коши.

Весьма простым является метод Эйлера (см. § 1.7).

Остается еще доказать, что если  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные по  $x$  и  $y$  до  $p$ -го порядка на  $D$ , то указанное решение  $y(x)$  уравнения (1) имеет непрерывные производные по  $x$  до  $(p+1)$ -го порядка на  $\sigma$ .

В самом деле, имеет место тождество

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in \sigma). \quad (8)$$

Так как функция  $y(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), то она всюду на  $\sigma$  имеет производную по  $x$  и потому непрерывна. Далее по условию  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$  и  $y$  на  $D$ , поэтому правая часть (8) непрерывна по  $x$  на  $\sigma$ . Значит,  $y'(x)$  также непрерывна на  $\sigma$ .

Если  $p \geq 1$ , то правая часть (8) имеет непрерывную производную по переменной  $x$ , значит, и левая часть тождества имеет непрерывную производную по  $x$ . Следовательно, функция  $y(x)$  имеет непрерывную производную второго порядка. Из тождества (8) находим

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x). \quad (9)$$

Применяя к тождеству (9) те же рассуждения, что и выше, найдем, что при  $p \geq 2$  функция  $y(x)$  имеет непрерывную производную третьего порядка на  $\sigma$  и т. д.

## § 1.7. Метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция  $f(x, y)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет условиям теоремы существования. По теореме существования имеются отрезок  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  и определенное на нем единственное решение  $y = y(x)$  уравнение (1), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ .

Для числа  $\delta$  теорема дает оценку сверху

$$\delta < (a, 1/N, b/M).$$

Метод Эйлера<sup>1</sup> дает возможность приближенно выразить указанную функцию теоретически с любой наперед заданной точностью.

Пусть требуется вычислить приближенно  $y(d)$ , где для определенности  $x_0 < d < x_0 + \delta$ . Разделим  $[x_0, d]$  на  $n$  равных частей точками  $x_0, x_1, \dots, x_n = d$ . Длину отрезка  $\{x_i, x_{i+1}\}$ ,  $h = x_{i+1} - x_i$ , будем называть *шагом вычисления*. Приближенные значения решения в точках  $x_i$  обозначим через  $y_i$ .

На  $[x_0, x_1]$  вместо уравнения (1) будем рассматривать уравнение с начальным условием (задача Коши)

$$Y'_n(x) = f(x_0, y_0) \quad (x_0 \leq x \leq x_1), \quad Y_n(x_0) = y_0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Y_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Эту функцию (линейную) мы и примем за приближенное решение уравнения (1) на отрезке  $[x_0, x_1]$ . С геометрической точки зрения это значит, что мы искомую интегральную кривую заменили отрезком касательной к интегральной кривой в точке  $(x_0, y_0)$ .

Из формулы (2) получаем

$$y_1 = Y_n(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Дальше рассуждаем по индукции. Если приближенные значения решения  $y_1, y_2, \dots, y_k$  известны, то на  $[x_k, x_{k+1}]$  рассматриваем вместо уравнения (1) уравнение

<sup>1</sup> Л. Эйлер (1707–1783) – великий математик, академик Российской-

$$Y'_n(x) = f(x_k, y_k) \quad (x_k \leq x \leq x_{k+1}), \quad Y_n(x_k) = y_k.$$

Решение этого уравнения

$$Y_n(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

принимается за приближенное решение уравнения (1) на  $[x_k, x_{k+1}]$ .

Полагая в (3)  $x = x_{k+1}$ , получим

$$y_{k+1} = Y_n(x_{k+1}) = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

Формула (4) и определяет *метод Эйлера*.

Функция  $Y_n(x)$ , определяемая на  $[x_0, d]$  с помощью равенства (3), называется «*ломаной Эйлера*» (рис. 10). Можно доказать, что при условиях теоремы существования последовательность ломаных Эйлера  $\{Y_n(x)\}$  равномерно сходится на  $[x_0, d]$  к истинному решению задачи при  $n \rightarrow \infty$ .

### § 1.8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Чтобы решить дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

можно попытаться сначала решить его относительно  $y'$ . Если это удастся, то мы получим одно или много дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2)$$

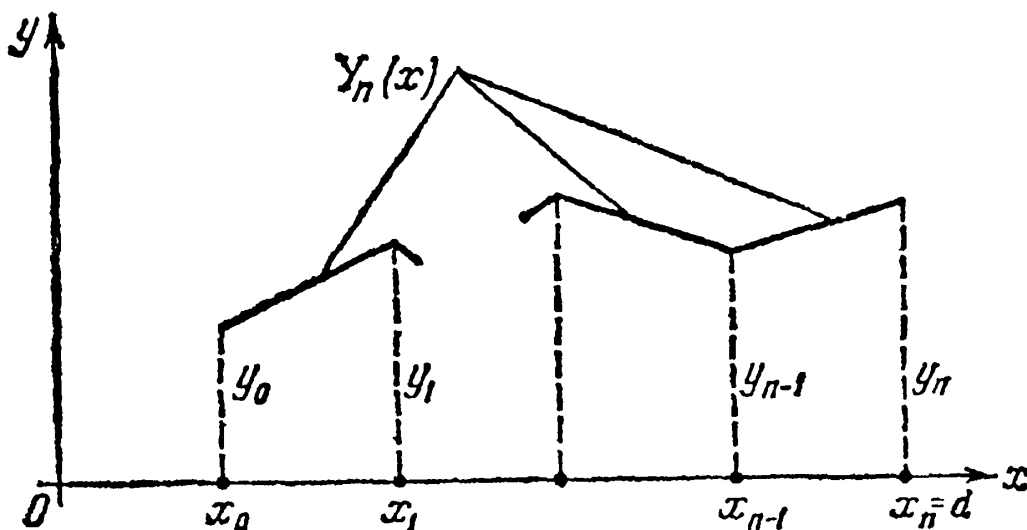


Рис. 10

Любое решение каждого из уравнений (2) будет решением уравнения (1). Все же следует попытаться выяснить, исчерпывают ли они все решения (1).

Например, чтобы решить уравнение

$$(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0, \quad (3)$$

тождественными преобразованиями его левой части приведем его к виду

$$(y' - 2x)(y' - y) = 0. \quad (3')$$

Рассмотрим два дифференциальных уравнения первого порядка

$$y' = 2x, \quad y' = y.$$

Общие их интегралы имеют соответственно вид

$$y = x^2 + C_1, \quad y = C_2 e^x, \quad (4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Для частных значений  $C_1$  и  $C_2$  функции (4) суть частные решения уравнения (3).

Но из указанных частных решений последних двух уравнений можно строить и другие частные решения уравнения (3). Например, функция

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2e^{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

является решением уравнения (3). Эта интегральная кривая составлена из двух интегральных кривых, принадлежащих разным семействам (4) (рис. 11).

Ниже рассматриваются два частных вида дифференциального уравнения (1), для которых можно указать иные пути их решения.

1°. Левая часть уравнения (1) не содержит  $x$  и  $y$ :

$$F(y') = 0. \quad (5)$$

Будем считать, что функция  $F$  непрерывна и имеет конечное число нулей.

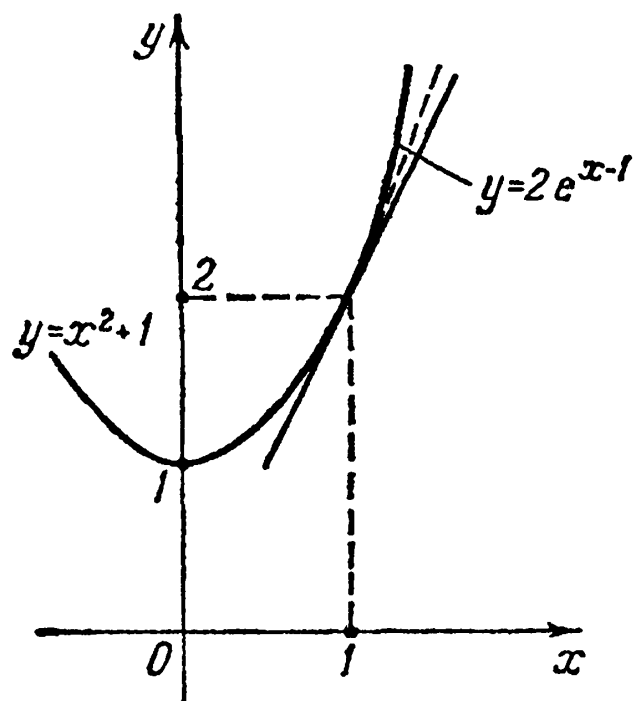


Рис. 11

Пусть  $y = y(x)$  есть решение уравнения, имеющее непрерывную производную. Тогда  $y'(x)$  равняется одному из корней уравнения (5), которое обозначим через  $k$ . Итак,  $y' = k$ , откуда  $y = kx + C$ , где  $C$  — постоянная и

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0. \quad (6)$$

Обратно, из того, что для непрерывно дифференцируемой функции  $y(x)$  при некоторой постоянной  $C$  выполняется равенство (6), следует, что

$$\frac{y-C}{x} = k \quad (\forall x \neq 0),$$

где  $k$  — некоторый корень функции  $F$ . Но тогда  $y = kx + C$ ,  $\forall x$ ,  $y' = k$  и  $F(y') = 0$ .

Мы доказали, что *общее (любое) решение дифференциального уравнения (5) определяется равенством (6), где  $C$  — произвольная постоянная.*

2°. Левая часть уравнения (1) не содержит  $x$ :

$$F(y, y') = 0. \quad (7)$$

Если уравнение (7) можно разрешить относительно  $y'$ , то  $y' = \varphi(y)$  — уравнение с разделяющимися переменными, которое решать мы умеем.

Допустим, что уравнение (7) нельзя или трудно решить относительно  $y'$ , но легко можно решить относительно  $y$ :  $y = \varphi(y')$ .

Введем в рассмотрение параметр  $p = \frac{dy}{dx}$ , тогда

$$y = \varphi(p), \quad dy = \varphi'(p)dp, \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

откуда

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C,$$

или

$$x = \psi(p) + C.$$

Теперь, исключая из системы

$$x = \psi(p) + C, \quad y = \varphi(p) \quad (8)$$

параметр  $p$ , мы и получим общий интеграл  $\Phi(x, y, C) = 0$  дифференциального уравнения (7).

Систему (8) можно также рассматривать как параметрическое задание решения уравнения (7). Параметр  $p$  можно вводить и произвольным образом  $y' = \omega(p)$ , но так, чтобы уравнение (7) проще решалось относительно  $y$ ,  $y = \varphi(p)$ , и чтобы проще находился соответствующий интеграл для определения функции

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{\omega(p)} + C.$$

**Пример.** Решить уравнение  $x\sqrt{1+y'^2} = 2y'$ .

Если ввести параметр  $p = y'$ , то получаются довольно сложные интегралы. Здесь лучше положить  $y' = \operatorname{tg} p$  ( $-\pi/2 < p < \pi/2$ ). Тогда

$$x = \frac{2\operatorname{tg} p}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 p}} = 2 \sin p, \quad dx = 2 \cos p dp,$$

$$dy = \operatorname{tg} p dx = 2 \sin p dp, \quad y = -\cos p + C.$$

Из системы

$$x = 2 \sin p, \quad y = -\cos p + C$$

получаем

$$x^2 + (y - C)^2 = 4, \quad (4)$$

т. е. любое решение нашего дифференциального уравнения есть решение уравнения (4) при некоторой постоянной  $C$ . Это семейство окружностей радиуса 2 с центром в точках  $(0, C)$  (рис. 12). Можно доказать, что равенство (4) есть общий интеграл для решений вида  $y(x)$  и вида  $x(y)$ .

В данном случае можно также параметр ввести по формуле

$$y' = \operatorname{sh} p.$$

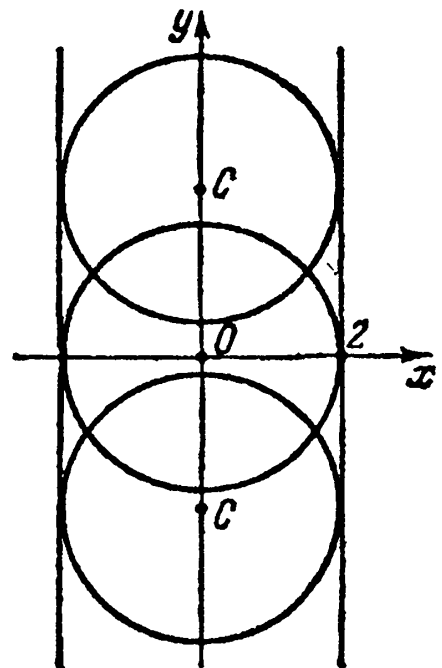


Рис. 12

**З а м е ч а н и е.** Аналогичным образом рассматривается дифференциальное уравнение вида  $F(x, y') = 0$ .



## § 1.9. Особые решения

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Если в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  плоскости  $xOy$  выполняются условия теоремы существования и единственности, то через нее проходит и притом только одна интегральная кривая.

Если условия теоремы существования не соблюдаются, то тут могут быть различные случаи. Через точку  $(x_0, y_0)$  все же может проходить одна интегральная кривая или несколько или бесконечное множество, или же нет интегральной кривой, которая проходила бы через точку  $(x_0, y_0)$ . Интересен тот случай, когда дифференциальное уравнение (1) имеет особое решение.

Решение дифференциального уравнения первого порядка называется *особым*, если соответствующая интегральная кривая обладает тем свойством, что через любую ее точку проходит, кроме нее, еще и другая касающаяся ее интегральная кривая данного уравнения.

Нередко приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями вида (1), где функция  $f(x, y)$  непрерывна на

некоторой области  $\Omega$ , а ее частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  конеч-

на и непрерывна не всюду на  $\Omega$ . Имеются на  $\Omega$  такие

точки, где  $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ . В каждой такой точке, вообще говоря,

нарушаются условия существования и единственности решения дифференциального уравнения (1), а если такие точки образуют гладкие линии, то последние могут представлять особые решения дифференциального уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим простейшее уравнение Бернул-ли  $y' = y^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $y \geq 0$ . Здесь  $f(x, y) = y^\alpha$  — непрерывная

функция на верхней полуплоскости. Функция  $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$

при  $0 < \alpha < 1$  не ограничена в окрестности  $y = 0$ . Функция  $y = 0$  является решением уравнения. Для начального условия  $y(x_0) = 0$  есть еще одно решение

$$y = [(x - x_0)(1 - \alpha)]^{1/(1-\alpha)},$$

удовлетворяющее этому уравнению и проходящее через точку  $(x_0, 0)$ . Касательная к этой кривой в точке  $(x_0, 0)$ , очевидно, есть ось  $x$  ( $y \equiv 0$ ). Поэтому  $y \equiv 0$  есть особое решение.

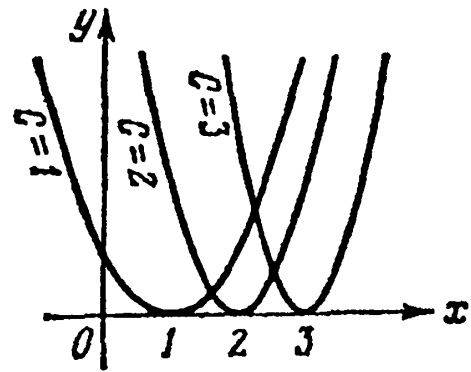


Рис. 13

**Пример 2.**  $y' = y^\alpha + 1$ ,  $y \geq 0$ .

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$  и при  $0 < \alpha < 1$  эта функция не ограничена в окрестности  $y = 0$ . Однако  $y \equiv 0$  не является решением уравнения. Решение уравнения, например при  $\alpha = 1/2$ , определяется неявно равенством  $x + C = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$  ( $y \geq 0$ ), т. е. через каждую точку  $(x_0, 0)$  проходит единственная интегральная кривая  $x - x_0 = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$ .

**Пример 3.** Функции  $y = C(x - C)^2$  при любом  $C$  (рис. 13) являются решениями уравнения  $F(x, y, y') \equiv 4xyy' - y'^3 - 8y^2 = 0$ . Функция  $y \equiv 0$  является особым решением данного уравнения.

## § 1.10. Огибающая семейства кривых

Пусть дано семейство гладких кривых  $\Gamma_\alpha$ , определяемых уравнением

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная (параметр) и функция  $\Phi(x, y, \alpha)$ , непрерывно дифференцируемая на некоторой области точек  $(x, y, \alpha)$ .

Кривая  $E$  называется *огибающей* семейства кривых (1), если

она касается каждой кривой  $\Gamma_\alpha$  семейства и при этом вся состоит из этих точек касания.

Точнее, *огibaющей*  $E$  семейства  $\Gamma_\alpha$ , зависящих от параметра  $\alpha$ , где  $a < \alpha < b$ , называется гладкая кривая

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\alpha), \\ y &= y(\alpha), \end{aligned} \right\} (a < \alpha < b), \quad (2)$$

касающаяся при любом значении параметра  $\alpha$ , соответствующей кривой  $\Gamma_\alpha$ .

Кривые  $\Gamma_\alpha$  будем называть *огibaемыми* (рис. 14).

Найдем уравнение *огibaющей*. Зададим значение  $\alpha$ . Ему соответствует на  $\Gamma_\alpha$  точка  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$ , принадлежащая одновременно  $\Gamma_\alpha$  и  $E$ , в которой  $E$  и  $\Gamma_\alpha$  имеют общую касательную.

Очевидно, имеет место тождество

$$\Phi(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \equiv 0 \quad (a < \alpha < b).$$

Продифференцируем его по  $\alpha$ :

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) + \Phi'_\alpha \equiv 0$$

$$(a < \alpha < b).$$

Вектор  $(x'(\alpha), y'(\alpha))$  направлен по касательной к  $E$ , которая совпадает с касательной к  $\Gamma_\alpha$  в точке  $(x(\alpha), y(\alpha))$ . Но тогда (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 8.16)

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) = 0.$$

Следовательно,

$$\Phi'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0,$$

т. е.

$$\Phi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \quad (3)$$

в точке  $(x, y)$  касания  $E$  с  $\Gamma_\alpha$ . Для этой точки выполняется также равенство

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0.$$

Таким образом, уравнение *огibaющей* семейства (1) определяется двумя уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, \alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Равенства (5) дают необходимое условие существования

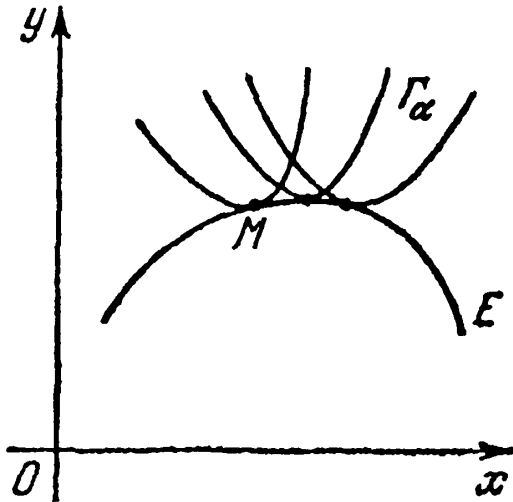


Рис. 14

оггибающей, т. е. если семейство (1) имеет оггибающую, то ее уравнение задается системой (5).

Если же мы составим систему (5) и решим ее, то решение системы не обязательно дает оггибающую семейства (1).

Пусть теперь дано дифференциальное уравнение  $F(x, y, y') = 0$  и  $\Phi(x, y, C) = 0$  — его общий интеграл.

Если семейство интегральных кривых  $\Phi(x, y, C) = 0$  имеет оггибающую, то ясно, что она также является интегральной кривой и, следовательно, *особым решением*.

Если же формально исключить  $C$  из системы

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

то в некоторых случаях получим особое решение.

Если общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид

$$\Psi(x, y) = C,$$

где  $\Psi(x, y)$  — непрерывно дифференцируемая функция, то определяемое им семейство (всех решений дифференциального уравнения) на соответствующей области не имеет оггибающей (см. теорему 1 § 1.2).

Если же функция  $\Psi(x, y)$  не является непрерывно дифференцируемой в некоторых точках  $(x, y)$ , то совокупность этих точек может дать оггибающую семейства.

**Пример.**  $y' = y^{2/3}$ .

Это уравнение Бернулли. Разделяя переменные, получим  $y^{-2/3} dy = dx$  ( $y \neq 0$ ),  $3y^{1/3} = x - C$ ,  $27y = (x - C)^3$ ,  $\Phi(x, y, C) \equiv 27y - (x - C)^3 = 0$  — общий интеграл, где функция  $\Phi(x, y, C)$  непрерывно дифференцируема.

Составим систему (6):

$$\left. \begin{aligned} 27y - (x - C)^3 &= 0, \\ 3(x - C)^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Исключая  $C$ , получаем  $y = 0$ . Проверкой убеждаемся, что  $y = 0$  — решение исходного уравнения. Это особое решение (см. пример 1 § 1.9 и замечание к примеру 3 § 1.2) и оггибающая семейства кривых  $27y - (x - C)^3 = 0$ .

Если рассматривать общий интеграл в разрешенной относительно  $C$  форме:  $C = x - 3y^{1/3}$ , то функция  $\Psi(x, y) = x - 3y^{1/3}$  не является непрерывно дифференцируемой в точках оси  $y = 0$ , которая, как мы убедились, является оггибающей семейства кубических парабол.

## § 1.11. Дифференциальное уравнение второго порядка

Уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Предполагается, что  $F(u, v, w, g)$  — заданная непрерывно дифференцируемая функция от точек  $(u, v, w, g)$  некоторой области  $\Omega$  четырехмерного пространства.

Любая функция  $y = y(x)$ , имеющая на некотором интервале непрерывную производную второго порядка и удовлетворяющая уравнению (1), называется *решением* этого уравнения или его *интегральной кривой*.

Каждое из них  $y = y(x)$  определено, вообще говоря, на некотором своем интервале  $a < x < b$ . Конечно, для любого  $x$  из этого интервала точка

$$(x, y(x), y'(x), y''(x)) \in \Omega.$$

Нередко на решение, которое ищут, накладывают дополнительные условия. Особый интерес представляют такие условия, которые гарантируют единственное решение уравнения. Обычно эти условия имеют вид

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \quad (2)$$

и называются *начальными условиями*. Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (2), называется *задачей Коши*. С геометрической точки зрения условия (2) означают, что из семейства интегральных кривых, проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ , мы выделяем определенную интегральную кривую, имеющую заданный угол наклона ( $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = y'_0$ , рис. 15).

В уравнение (1) могут не входить явно все переменные  $x, y, y'$ , но  $y''$  должно входить, иначе это уравнение не будет дифференциальным уравнением второго порядка, например,  $x^2 + y' + y'' = 0$ ,  $y'y'' + 1 = 0$ .

Разрешим уравнение (1) относительно  $y''$ . Будем предполагать это возможным. Из теории неявных функций известно, что если функция  $F(u, v, w, g)$  равна нулю в некоторой точке  $(u_0, v_0, w_0, g_0)$ , имеет непрерывные част-

ные производные в окрестности этой точки и частная производная  $\frac{\partial F}{\partial g} \neq 0$  в этой точке, то уравнение  $F(u, v, w, g) = 0$  имеет в некоторой окрестности указанной точки решение  $g = f(u, v, w)$  и притом единственное.

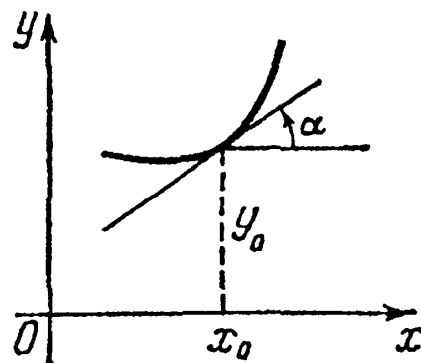


Рис. 15

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (3)$$

где функция  $f(u, v, w)$  задана на некоторой области  $\omega$  трехмерного пространства точек  $(u, v, w)$ , непрерывна на ней и имеет непрерывные частные производные. Функция  $f$  может и не зависеть явно от некоторых из переменных  $x, y, y'$ . Например, это имеет место для уравнений  $y'' = \varphi(x)$ ,  $y'' = y' + y$ ,  $y'' = y$ ,  $y'' = y'$ .

Пусть некоторая интегральная кривая  $y = y(x)$  проходит через точку  $(x_0, y_0)$  и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной, равный заданному числу  $y'_0$  (т. е.  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ ).

Этим однозначно определяется вторая производная от  $y(x)$  в точке  $x_0$ , равная

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0) \quad (y''_0 = y''(x_0)).$$

Однако возникает вопрос, если мы зададим  $x = x_0$  и произвольные числа  $y_0, y'_0$ , то существует ли на самом деле интегральная кривая  $y = y(x)$  уравнения (3), для которой  $y(x_0) = y_0$  и  $y'(x_0) = y'_0$ , и как много таких интегральных кривых. Следующая теорема показывает, что если функция  $f$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, y'_0)$  достаточно гладкая, то такая интегральная кривая существует и притом одна.

Доказательство этой теоремы, так же как и теоремы 1 § 1.12 и теоремы 1 § 1.13, мы не приводим. Оно может быть проведено на основании принципа сжатых отображений.

**Теорема 1.** Пусть правая часть уравнения (3), рассматриваемая как функция трех переменных  $(x, y, y')$ , заданная на трехмерной области  $\omega$ , непрерывна и имеет

на этой области непрерывные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y'}$ .

Тогда, какова бы ни была точка  $(x_0, y_0, y'_0) \in \omega$ , существует интервал  $(a, b)$  и определенная на нем дважды непрерывно дифференцируемая функция  $y = y(x)$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению (3) и начальным условиям  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ .

Функция, обладающая указанными свойствами, единственная.

Про функцию  $y(x)$  говорят, что она есть решение (интегральная кривая) дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (2). Или еще говорят, что она решает задачу Коши для указанных начальных условий.

Каждое такое решение удобно записывать в виде

$$y(x) = y(x_0, y_0, y'_0),$$

где  $y_0, y'_0$  — параметры решения. Они независимы — их можно взять какими угодно, лишь бы точка  $(x_0, y_0, y'_0) \in \omega$ .

Если зафиксировать  $x_0$ , то каждой системе чисел  $C_1 = y_0, C_2 = y'_0, (x_0, C_1, C_2) \in \omega$ , соответствует решение дифференциального уравнения (3), которое можно записать (при фиксированном  $x_0$ ) в виде

$$y = y(x_0, C_1, C_2),$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные — параметры.

**Пример.** Найти интегральную кривую уравнения  $y'' + y = 0$ , проходящую через точку  $(0, 1)$  и имеющую в ней угловой коэффициент касательной  $y'(0) = 0$ .

Легко проверить, что функция  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  является решением данного уравнения при любых постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Далее  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$ . Чтобы выполнялись начальные условия, необходимо положить  $C_1 = 1, C_2 = 0$ . Итак, искомая интегральная кривая имеет вид:  $y = \cos x$ .

## § 1.12. Система из двух дифференциальных уравнений первого порядка

В уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad (1)$$

наряду с его решением  $y = y(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , введем функцию  $z = z(x)$ , полагая  $y' = z$ . Тогда оно будет эквивалентно следующей системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

относительно двух неизвестных функций  $y$  и  $z$ .

В самом деле, пусть  $y(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , есть решение дифференциального уравнения (1). Оно имеет вторую непрерывную производную на  $(a, b)$ . Тогда  $z(x) = y'(x)$  имеет первую непрерывную производную на  $(a, b)$ . Таким образом, функции  $y(x)$  и  $z(x)$  имеют непрерывную производную и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (2).

Обратно, если две функции  $y(x)$ ,  $z(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , имеют непрерывные производные на  $(a, b)$  и удовлетворяют системе (2), то из первого уравнения системы (2) следует, что  $y(x)$  имеет вторую непрерывную производную на  $(a, b)$ , а подставляя  $z$  из первого уравнения во второе, получим, что  $y(x)$  есть решение дифференциального уравнения (1).

Система (2) есть частный случай системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \psi(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

относительно известных функций  $y$  и  $z$ .

Эта последняя, очевидно, есть частный случай системы

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, y', z') &= 0, \\ \Phi(x, y, z, y', z') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



где мы будем предполагать, что функции  $F$  и  $\Phi$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по  $y, y', z, z'$  в некоторой области точек  $x, y, z, y', z'$ .

Пара функций  $y(x), z(x)$  называется *решением системы дифференциальных уравнений (4)*, если эти функции определены на некотором интервале  $(a, b)$ , зависящем от этих функций, имеют непрерывные производные и удовлетворяют на  $(a, b)$  системе (4).

Если решить уравнения (4) относительно  $y'$  и  $z'$ , то получим систему вида (3) (конечно, предполагаем, что решение системы (4) относительно  $y'$  и  $z'$  возможно, что, как известно, обычно связано с неравенством нулю яко-

биана  $\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$ ).

Уравнения (3) (или (4)) образуют систему двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций  $y$  и  $z$ .

Система (3), разрешенная относительно  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ , называется *нормальной*.

Для нормальной системы (3) справедлива

**Теорема 1 (существования).** Пусть функции  $\varphi(x, y, z)$  и  $\psi(x, y, z)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по  $y$  и  $z$  на области  $\omega$  точек  $(x, y, z)$ , и пусть задана произвольная точка  $(x_0, y_0, z_0) \in \omega$ .

Тогда существует интервал  $(a, b)$  и определенные на нем непрерывно дифференцируемые функции  $y = y(x), z = z(x)$ , удовлетворяющие системе (3) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0. \quad (5)$$

Указанные функции  $y = y(x), z = z(x)$  единственны.

При этом, если функции  $\varphi$  и  $\psi$  имеют непрерывные частные производные порядка  $p$ , то решения  $y(x)$  и  $z(x)$  непрерывно дифференцируемы  $p + 1$  раз на указанном интервале  $(a, b)$ .

Выше было показано, что решение уравнения (1) второго порядка относительно одной функции может быть сведено к решению двух уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций (система (2)).

Но общая система дифференциальных уравнений первого порядка вида (3) тоже сводится к решению одного дифференциального уравнения второго порядка. В самом деле, подставив в систему (3) вместо  $y$  и  $z$  некоторые ее решения  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  и продифференцировав по  $x$  первое уравнение, получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z' \equiv \Phi(x, y, z). \quad (6)$$

Наряду с (6) будем рассматривать также первое уравнение (3)

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad (7)$$

в котором подставлены  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ .

Найдем  $z$  из (7) ( $z = \chi(x, y, y')$ ) и подставим в (6), тогда получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Phi(x, y, \chi(x, y, y')) \equiv \Lambda(x, y, y') \quad (8)$$

относительно рассматриваемой функции  $y = y(x)$ .

Мы получили, что если  $y(x)$ ,  $z(x)$  – решения системы (3), то  $y(x)$  – решение уравнения второго порядка.

Конечно, для того чтобы было возможным проделать эти выкладки, потребовались новые свойства от функций  $\varphi$  и  $\psi$ : непрерывная дифференцируемость  $\varphi$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и возможность разрешить первое уравнение (3) относительно  $z$ .

### § 1.13. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка

Уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка*.

Здесь  $F(u, v_0, v_1, \dots, v_n)$  – функция, непрерывная вместе

со своими частными производными  $\frac{\partial F}{\partial v_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial v_n}$  на некоторой области  $\Omega$  точек  $(u, v_0, v_1, \dots, v_n)$   $(n + 2)$ -мерного пространства.

Разрешая уравнение (1) относительно  $y^{(n)}$ , получаем

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Справедлива

**Теорема 1 (существования).** Пусть правая часть  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  уравнения (2), рассматриваемая как функция  $n+1$  переменных, непрерывна и имеет в некоторой окрестности  $\Omega$  точки  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  непрерыв-

ные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ .

Тогда существует интервал  $(a, b)$  и определенная на нем  $n$  раз непрерывно дифференцируемая функция  $y = y(x)$ , удовлетворяющая уравнению (2) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3)$$

Функция  $y = y(x)$ , обладающая указанными свойствами, единственна.

Таким образом,  $y(x)$  есть решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3).

Если зафиксировать  $x_0$ , то каждой системе чисел

$$C_1 = y_0, C_2 = y'_0, \dots, C_n = y_0^{(n-1)},$$

обладающих свойством

$$(x_0, C_1, \dots, C_n) \in \Omega,$$

будет соответствовать решение нашего дифференциального уравнения, которое (при фиксированном  $x_0$ !) можно записать в виде

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n). \quad (4)$$

В результате получаем семейство решений нашего дифференциального уравнения, зависящих от  $n$  параметров  $C_1, \dots, C_n$ . Каждой определенной системе  $(C_1, \dots, C_n)$  параметров  $((x_0, C_1, \dots, C_n) \in \Omega)$  соответствует свое решение дифференциального уравнения (со своим интервалом определения).

Можно в уравнении (2) ввести новые функции

$$y_1(x) = y, y_2(x) = y', \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}.$$

Все они во всяком случае имеют непрерывную первую производную. Тогда уравнение (2) окажется эквивалентным следующей системе из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система (5) есть частный случай системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n), \\ &((x, y_1, \dots, y_n) \in \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $n$  неизвестных функций  $y_1, \dots, y_n$ .

Это нормальная система (разрешенная относительно производных  $\frac{dy_j}{dx}$  ( $j = 1, \dots, n$ )). Она есть частный случай системы

$$F_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Справедлива

**Теорема 2 (существования).** Пусть функции  $\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) непрерывны, имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, начиная со второй, в некоторой области  $\Omega$  точек  $(x, y_1, \dots, y_n)$ , и пусть задана определенная точка  $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$  этой области.

Тогда существует интервал  $(a, b)$  и определенные на нем непрерывно дифференцируемые (единственные) функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , удовлетворяющие системе (6) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (8)$$

Если функции  $\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n)$  на  $\Omega$  непрерывно дифференцируемы  $p$  раз, то соответственно и решения системы  $y_j(x)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) обладают лучшими свойствами — они имеют непрерывную производную порядка  $p+1$ .

Если зафиксировать  $x_0$ , то каждой системе чисел

$$C_1 = y_{10}, \dots, C_n = y_{n0} \quad ((x_0, C_1, \dots, C_n) \in \Omega),$$

соответствует решение системы (6), которое можно записать (при фиксированном  $x_0$ !) в виде

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n), \quad (9)$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — произвольные постоянные — параметры.

Выше было отмечено, что решение уравнения  $n$ -го порядка может быть сведено к решению системы из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка с  $n$  неизвестными функциями. Но верно и обратное утверждение: решение системы (6) при определенных условиях может быть сведено к решению некоторого дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с одной неизвестной функцией.

Доказательство этого обратного утверждения представляет собой развитие соответствующего утверждения в случае  $n = 2$  (см. § 1.12).

**Пример.** Свести систему

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 + y_3,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 - 2y_3,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_1 + y_3$$

к дифференциальному уравнению третьего порядка.

Будем сводить нашу систему к дифференциальному уравнению относительно функции  $y_1(t)$ . Дифференцируя первое уравнение системы, с учетом двух других, имеем

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + y_1 + y_2 - y_3.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{d^3 y_1}{dt^3} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} - y_1 + y_2 - 3y_3. \quad (10)$$

Из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{dy_1}{dt} + y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

выражаем  $y_2$  и  $y_3$  через  $y_1$  и  $y_1'$ ,  $y_1''$ :

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}(y_1'' - 2y_1), \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-y_1'' - 2y_1'). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя эти значения  $y_2$  и  $y_3$  в (10), получим иско-  
мое уравнение третьего порядка относительно функции  $y_1(t)$ :

$$y_1''' - 3y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем функцию  $y_1$ , затем мы находим функции  $y_2$  и  $y_3$  по формулам (12).

## § 1.14. Понижение порядка дифференциального уравнения

Во многих случаях удается свести дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

к дифференциальному уравнению более низкого порядка, путем введения новой неизвестной функции. Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть левая часть уравнения (1) не содержит явно искомую функцию  $y$ , т. е. уравнение имеет вид

$$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2)$$

Введем новую функцию  $z(x) = y'(x)$ , тогда  $z' = y''$ , ...,  $z^{(n-1)} = y^{(n)}$  и уравнение (2) переписывается так:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0, \quad (3)$$

т. е. относительно функции  $z(x)$  оно представляет собой уравнение  $(n-1)$ -го порядка.

Любое решение  $z(x)$ ,  $a < x < b$ , этого уравнения мы должны подставить в дифференциальное уравнение  $y' = z(x)$  и решить последнее относительно  $y$ :

$$y = \int z(x) dx + C.$$

Появилась произвольная постоянная. Часто некоторые решения дифференциального уравнения (3), не обязательно все, образуют семейство функций

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) \quad (a < x < b),$$

зависящих от  $n-1$  параметров  $C_1, \dots, C_{n-1}$ . Ему соответствует семейство решений  $y$  дифференциального уравнения (2)

$$y = \int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx + C_n,$$

зависящих от  $n$  параметров  $C_1, \dots, C_n$  ( $C_n = C$ ).

Пример 1.  $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ .

Здесь функция  $y(x)$  явно не входит в уравнение. Полагая  $z = y'$ , находим  $z' = y''$  и наше уравнение принимает

вид  $z' = \sqrt{1 + z^2}$ . Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx, \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}),$$

т. е.

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{x+C_1}, \quad 1 + z^2 = e^{2(x+C_1)} - 2z e^{x+C_1} + z^2,$$

$$z = \frac{1}{2}(e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}) = \operatorname{sh}(x + C_1).$$

Но  $z = y'$ , значит,  $dy = \operatorname{sh}(x+C_1)dx$ ,  $y = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$ .

II. Пусть левая часть уравнения (1) не содержит явно независимую переменную  $x$ :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (4)$$

Будем считать в этом уравнении  $y$  независимым переменным, а  $y'$  — искомой функцией. Обозначим  $y' = z(y)$ .

Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz'_y)}{dx} = \frac{d(z \cdot z'_y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z(z'_y)^2 + z \cdot z''_y,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} = \omega(z, z'_y, \dots, z_y^{(n-1)}).$$

Подставляя эти значения в (4), получим дифференциальное уравнение  $(n - 1)$ -го порядка относительно  $z$ . Пусть  $z = z(y)$ ,  $\alpha < y < \beta$ , есть решение этого дифференциального

уравнения, отличное от нуля на  $(\alpha, \beta)$ . Так как  $z(y) = \frac{dy}{dx}$ ,

то

$$dx = \frac{dy}{z(y)}, \quad x = \int \frac{dy}{z(y)} + C \quad (\alpha < y < \beta).$$

Мы получили решение  $y(x)$  исходного уравнения (4) в неявной форме. При этом оно зависит от произвольной постоянной  $C$ .

Но часто функции  $z = z(y)$  получаются в виде семейств функций

$$z = z(y, C_1, \dots, C_{n-1}) \quad (\alpha < y < \beta),$$

зависящих от  $n - 1$  параметров  $C_1, \dots, C_{n-1}$ . Им соответствующие решения  $y(x)$  в свою очередь образуют семейство

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n)$$

функций, зависящих от  $n$  параметров  $C_1, \dots, C_n$  ( $C_n = C$ ).

**Пример 2.**  $y'^2 + 2yy'' = 0$ .

Здесь  $x$  явно не присутствует, поэтому полагаем  $y'_x =$

$$= z(y), \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = z \cdot z'_y. \quad \text{Подставляя эти значения}$$

в уравнение, имеем  $z^2 + 2yzz'_y = 0$  или  $z(z + 2yz'_y) = 0$ .



Отсюда  $z = 0$  и  $z + 2yz'_y = 0$ .

Если  $z = 0$ , то  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $y = \text{const}$ .

Если  $z + 2yz'_y = 0$ , то, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln \left| \frac{z}{C_1} \right| = \ln \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad z = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y} dy = C_1 dx, \quad \frac{2}{3} y^{3/2} = C_1 x + C_2.$$

III. Левая часть уравнения (1) – однородная функция степени  $m$  относительно переменных  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , т. е.

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (t > 0).$$

Для понижения порядка вводим новую функцию  $z(x)$  по формуле

$$y' = yz \quad (y \neq 0).$$

Тогда

$$y'' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}).$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

или в силу однородности функции

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Так как  $y \neq 0$ , то отсюда получаем дифференциальное уравнение  $(n-1)$ -го порядка

$$F(x, 1, z, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Пусть  $z = z(x)$  есть решение этого уравнения. Так как  $z(x) = y'/y$ , то

$$\frac{dy}{y} = z(x) dx, \quad \ln \left| \frac{y}{C} \right| = \int z(x) dx, \quad y = C \exp \left( \int z(x) dx \right),$$

где  $C$  – произвольная постоянная. И если оказалось, что

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

то

$$y = C_n \exp \left( \int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx \right),$$

где  $C_1, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

**Пример 3.** Решим этим методом уравнение предыдущего примера.

Функция  $F(x, y, y', y'') = y'^2 + 2yy''$  – однородная функция второй степени по отношению  $y, y', y''$ . Функция  $y(x) \equiv 0$  – решение уравнения. Будем считать, что  $y \neq 0$ . Полагая  $y' = zy$ , имеем  $y'' = y(z' + z^2)$ . Подставляя эти значения в уравнение, получаем

$$(yz)^2 + 2y^2(z' + z^2) = 0 \quad (y \neq 0).$$

Отсюда  $3z^2 + 2z' = 0$ . Функция  $z \equiv 0$  – решение данного уравнения (тогда  $y' = 0$ ,  $y = C$  – решение исходного уравнения). Пусть  $z \neq 0$ , тогда

$$-\frac{2dz}{3z^2} = dx, \quad \frac{2}{3}z^{-1} = x + C_1, \quad z = \frac{2}{3}(x + C_1)^{-1},$$

$$\frac{dy}{y} = zdx = \frac{2}{3} \cdot \frac{dx}{x + C_1}, \quad \ln \left| \frac{y}{C_2} \right| = \frac{2}{3} \ln |x + C_1|,$$

$y = C_2(x + C_1)^{2/3}$  – общее решение. Отметим, что решение  $y \equiv 0$  получается из общего при  $C_2 = 0$ .

## § 1.15. Линейные уравнения высшего порядка

**1.15.1. Понятие линейного уравнения высшего порядка.** *Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$(a < x < b),$$

где  $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$  – заданные непрерывные на интервале  $(a, b)$  функции. Левую часть уравнения (1) обозначим через  $L_n[y] \equiv L[y]$ . Ее называют *линейным дифференциальным оператором  $n$ -го порядка*.

Оператор  $L(y)$  обладает свойствами:

1)  $L[Cy] = CL[y]$  – однородность оператора;

2)  $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$  – аддитивность оператора.

Отметим, что однородный и аддитивный оператор называется *линейным*.

На основании этих свойств легко получаем, что

$$L\left[\sum_{k=1}^m C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^m C_k L[y_k], \quad (2)$$

где  $C_k$  — произвольные постоянные.

**Пример 1.** Пусть  $L[y] = y'' + y$ .

Легко видеть, что  $L[\sin x] = -\sin x + \sin x = 0$ ,

$L[x^2] = 2 + x^2$ .

Уравнение (1) можно записать в форме

$$L[y] \equiv L_n[y] = f(x) \quad (a < x < b). \quad (1')$$

Если  $f(x) \equiv 0$ , то уравнение

$$L_n[y] = 0 \quad (a < x < b), \quad (3)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка*. В связи с этим уравнение (1) называется *неоднородным*.

Мы считаем, что функции  $f(x)$ ,  $p_0(x)$ , ...,  $p_{n-1}(x)$  непрерывны на интервале  $(a, b)$ . Можно доказать, что для таких функций *дифференциальное уравнение (1) имеет единственное определенное на том же (!) интервале  $(a, b)$  решение, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

*При этом, если функции  $p_j(x)$  и  $f(x)$  имеют на  $(a, b)$  непрерывные производные порядка  $q$ , то указанное решение  $y(x)$  имеет на  $(a, b)$  непрерывные производные до порядка  $n + q$  включительно.*

**Теорема 1.** *Если  $y_1, \dots, y_m$  являются решениями однородного уравнения (3), то их линейная комбинация*

*$\sum_{k=1}^m C_k y_k$  также является решением уравнения (3).*

Это вытекает из равенства (2).

**1.15.2. Фундаментальная система решений уравнения.** Введем понятие линейной зависимости функций, по аналогии с соответствующим понятием для системы векторов.

Функции  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  называются *линейно зависимыми* на  $(a, b)$ , если одна из них является линейной

комбинацией других  $\forall x \in (a, b)$ . Другими словами, функции  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  называются линейно зависимыми на  $(a, b)$ , если существуют числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x) \equiv 0 \quad (a < x < b). \quad (4)$$

Если тождество (4) выполняется лишь в случае, когда все  $\alpha_i = 0$ , то функции  $y_1, \dots, y_m$  называются *линейно независимыми* на  $(a, b)$ .

Система из  $n$  линейно независимых на интервале  $(a, b)$  решений

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (3) с непрерывными на  $(a, b)$  коэффициентами  $p_j(x)$  называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Чтобы решить линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка (3) с непрерывными коэффициентами  $p_j(x)$ , надо найти его фундаментальную систему решений.

Согласно теореме 1 *произвольная линейная комбинация из решений  $y_j(x)$ , т. е. сумма*

$$y = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x), \quad (5)$$

где  $C_k$  — произвольные числа, есть в свою очередь решение уравнения (3) на  $(a, b)$ . Но оказывается, что и обратно, всякое решение дифференциального уравнения (3) на интервале  $(a, b)$  есть некоторая линейная комбинация из указанных (независимых между собой) его частных решений  $y_j(x)$  (см. ниже теорему 4), образующих фундаментальную систему решений.

Таким образом, *общее решение однородного дифференциального уравнения (3) имеет вид (5), где  $C_k$  — произвольные постоянные, а  $y_k(x)$  — частные решения (3), образующие фундаментальную систему решений однородного уравнения.*

Отметим, что общее решение неоднородного уравнения (1) есть сумма какого-либо его частного решения  $y_0(x)$  и общего решения однородного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j y_j(x). \quad (6)$$

В самом деле,

$$L_n[y] = L_n[y_0] + \sum_{j=1}^n C_j L[y_j] = f(x) + 0 = f(x).$$

С другой стороны, если  $y$  есть произвольное решение уравнения (1), то

$$L_n[y - y_0] = L_n[y] - L_n[y_0] = f(x) - f(x) = 0,$$

и, следовательно,  $y - y_0$  есть решение однородного уравнения; но тогда существуют такие числа  $C_j$ , что

$$y(x) - y_0(x) = \sum_{j=1}^n C_j y_j(x),$$

т. е. для этих чисел выполняется равенство (6).

### 1.15.3. Определитель Вронского.

**Теорема 2.** Если функции  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  линейно зависимы на  $(a, b)$  и имеют производные до  $(m-1)$ -го порядка, то определитель

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (\forall x \in (a, b)). \quad (7)$$

Определитель (7) называется *определителем Вронского*<sup>1</sup> или *вронскианом* и обозначается символом  $W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_m]$ .

**Доказательство.** Так как функции  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  линейно зависимы на  $(a, b)$ , то существуют такие не все равные нулю числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , при которых выполняется тождество (4) на  $(a, b)$ . Дифференцируя его  $m-1$  раз, получим систему уравнений

<sup>1</sup> Ю. Гёне-Вронский (1778–1853) – польский математик.

$$\alpha_1 y_1(x), \dots, \alpha_m y_m(x) \equiv 0,$$

$$\alpha_1 y_1'(x), \dots, \alpha_m y_m'(x) \equiv 0,$$

.....

$$\alpha_1 y_1^{(m-1)}(x), \dots, \alpha_m y_m^{(m-1)}(x) \equiv 0.$$

Эта однородная система по условию имеет нетривиальное решение  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  (т. е. хотя бы одно  $\alpha_j \neq 0$ ) при  $\forall x \in (a, b)$ . Последнее возможно, когда определитель системы, который является определителем Вронского  $W(x)$ , тождественно равен нулю. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Из теоремы 2 вытекает, что если  $W(x) \neq 0$  хотя бы в одной точке  $(a, b)$ , то функции  $y_1, \dots, y_m$  линейно независимы на  $(a, b)$ .

**П р и м е р 2.** Функции  $1, x, \dots, x^{m-1}$  линейно независимы на любом  $(a, b)$ , так как

$$W[1, x, \dots, x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \dots & (m-1)x^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1! \cdot 2! \dots (m-1)! \neq 0.$$

**П р и м е р 3.** Функции  $e^{k_1 x}, \dots, e^{k_m x}$  линейно независимы на любом  $(a, b)$ , если  $k_1, \dots, k_m$  — различные числа (действительные или комплексные).

В самом деле,

$$W[e^{k_1 x}, \dots, e^{k_m x}] =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + \dots + k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_m \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$



Но таким же условиям удовлетворяет и тривиальное решение  $y \equiv 0$ . В силу теоремы существования и единственности решение, удовлетворяющее этим  $n$  начальным условиям, может быть только одно, следовательно,

но,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) = 0$  на  $(a, b)$ , т. е. функции  $y_1, \dots, y_n$  линейно

зависимы на  $(a, b)$ , что не предполагалось. Теорема доказана.

Если  $p_i(x)$  – разрывные функции в интервале, где мы ищем решение, то уравнение  $L_n[y] = 0$  может иметь не одно решение, удовлетворяющее начальным условиям  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ , и тогда возможно, что  $W(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

**Пример 5.** Легко проверить, что функции

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ (x-1)^\alpha, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (\alpha > 2)$$

линейно независимы на  $(0, 2)$ , и для них  $W(x) \equiv 0$  на  $(0, 2)$ .

Это связано с тем, что функция  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  является общим решением уравнения

$$y'' - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2} y = 0,$$

где  $p_0(x) = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}$  разрывна в точке  $x = 1$ . Для этого

уравнения теорема существования и единственности не имеет места (в окрестности точки  $x = 1$ ). Не только функция  $y \equiv 0$ , но и функция  $y_1(x)$  является решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим условиям  $y=0$  и  $y'=0$  при  $x=1$ .

#### 1.15.4. Структура общего решения.

**Теорема 4.** Если  $y_1, \dots, y_n$  – линейно независимые на  $(a, b)$  решения линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка  $L_n[y] = 0$  с непрерывными коэффициентами  $p_i(x)$ ,  $a < x < b$ , то функция





гда общее решение будет их линейной комбинацией (9). Напомним, что любую совокупность из  $n$  линейно независимых частных решений уравнения  $L_n[y] = 0$  мы условились называть *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Возникает вопрос, всегда ли существует фундаментальная система (3) с непрерывными коэффициентами? Покажем, что существует.

Зададим  $n$  векторов

$$a^{(1)} = (1, 0, \dots, 0),$$

$$a^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$a^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Каждому из этих векторов приведем в соответствие решение  $y_k(x)$  уравнения (3). Именно, пусть  $y_k(x)$  есть решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y_k(x_0) = 0, y_k'(x_0) = 0, \dots, y_k^{(k-2)}(x_0) = 0, y_k^{(k-1)}(x_0) = 1,$$

$$y_k^{(k)}(x_0) = 0, \dots, y_k^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Определитель Вронского  $W(x)$  для этой системы решений при  $x = x_0$  ( $a \leq x \leq b$ ), очевидно, есть определитель матрицы, составленной из векторов  $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ . Он равен 1:

$$W(x_0) = 1 \neq 0.$$

Но тогда система решений  $y_1, \dots, y_n$  линейно независима, потому что для зависимой системы определитель Вронского был бы тождественно равен нулю.

## § 1.16. Линейные однородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

### 1.16.1. Методы решения. Уравнение

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0 \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

где  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) — постоянные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами*.

Чтобы решить уравнение (1), надо найти какую-либо его фундаментальную систему решений, т. е. найти какие-

либо его  $n$  частных решений  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , образующих линейно независимую систему на всей оси, и тогда (см. § 1.15) общее решение уравнения (1) будет иметь вид

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — произвольные постоянные числа.

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде  $y = e^{kx}$ , где  $k$  — постоянное число. Тогда

$$y' = k e^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Подставляя эти значения производных в (1), получаем

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{(n-1)} + \dots + p_1k + p_0] = 0.$$

Так как  $e^{kx} \neq 0$ , то

$$R_n(k) \equiv k^n + p_{n-1}k^{(n-1)} + \dots + p_1k + p_0 = 0. \quad (2)$$

Таким образом, если  $k$  есть корень алгебраического уравнения (2), то функция  $y = e^{kx}$  есть решение уравнения (1) и обратно. Уравнение (2) называется характеристическим для уравнения (1). Это уравнение можно получить из (1), если производные  $y^{(j)}$  заменить соответственно числами  $k^j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Обратно по уравнению (2) легко восстановить уравнение (1). Уравнение (2), как известно, имеет  $n$  корней с учетом кратности.

1°. Пусть корни уравнения (2)  $k_1, \dots, k_n$  различны. Тогда  $n$  функций

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx} \quad (3)$$

являются решениями уравнения (1) и притом линейно независимыми на  $(-\infty, \infty)$  (см. пример 3 § 1.15), т. е. они образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Поэтому в этом случае (см. теорему 4 § 1.15) общее решение уравнения (1) запишется в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^n C_j e^{k_j x}, \quad (4)$$

где  $C_j$  — произвольные постоянные.

**Пример 1.** Уравнение  $y'' - 5y' + 6y = 0$  имеет характеристическое уравнение  $k^2 - 5k + 6 = 0$  с простыми действительными корнями  $k_1 = 2, k_2 = 3$ . Общее решение  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ .

**Пример 2.** Уравнение  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$  имеет характеристическое уравнение  $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$  или  $(k - 2)(k^2 - 1) = 0$ . Корни простые:  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = -1$ . Им соответствует общее решение уравнения  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ .

Если числа  $p_i$  действительные и если какой-либо корень  $k_j$  комплексный ( $k_j = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ ), то среди остальных корней должен быть ему сопряженный ( $\bar{k}_s = \alpha - i\beta$ ,  $s \neq j$ ). Так как комплексные функции  $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $e^{(\alpha-i\beta)x}$  суть решения уравнения (1), то (см. теорему 1 §1.15) функция

$$\frac{1}{2} [e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}] = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (5)$$

так же как функция

$$\frac{1}{2i} [e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}] = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (6)$$

в свою очередь есть решение уравнения (1). Здесь мы использовали формулу Эйлера  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ .

Решения (5) и (6) – действительные функции, и в этом они имеют преимущество перед функциями  $\exp(k_j x)$ ,  $\exp(k_s x)$ , поэтому ими часто заменяют в системе (3) эти последние функции.

Можно доказать, что таким образом видоизмененная система (3) линейно независима на  $(-\infty, \infty)$ .

**Пример 3.** Уравнению  $y'' + y = 0$  соответствует характеристическое уравнение  $k^2 + 1 = 0$  и комплексные корни  $k_1 = i$ ,  $k_2 = -i$ , сопряженные друг другу. В показательной форме решение имеет вид

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}.$$

Используя формулы Эйлера, общее решение можно записать:

$$\begin{aligned} y &= C_1(\cos x + i \sin x) + C_2(\cos x - i \sin x) = \\ &= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x = A \cos x + B \sin x. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные, потому что уравнения  $A = C_1 + C_2$ ,  $B = i(C_1 - C_2)$  могут быть решены относительно  $C_1$ ,  $C_2$ , при любых  $A$ ,  $B$ .

**Пример 4.** Уравнению  $y'' + y' + y = 0$  соответствует характеристическое уравнение  $k^2 + k + 1 = 0$  с корнями

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Общее решение уравнения запишется так:

$$y = e^{-x/2} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

2°. Если  $k_1$  — корень кратности  $m$ , то в системе (3) возникает  $m$  равных функций

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_m x} \quad (k_1 = k_2 = \dots = k_m) \quad (7)$$

и система (3) перестает быть линейно независимой. Оказывается (см. ниже лемму 1) в этом случае (когда  $k_1$  — кратный корень) функции

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{k_1 x} \quad (8)$$

тоже будут решениями уравнения (1), образующими линейно независимую на любом интервале  $(a, b)$  систему (см. ниже лемму 1). Ими обычно заменяют функции (7) в системе (3).

Если произвести такую замену для всех кратных корней, то полученная новая система будет, как это можно доказать, линейно независима.

**Пример 5.** Уравнению  $y'' - 2y' + y = 0$  соответствует характеристическое уравнение  $k^2 - 2k + 1 = 0$ , имеющее один двукратный корень  $k = 1$ . Поэтому общее решение этого уравнения записывается в виде  $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ .

**Пример 6.** Уравнение  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$  имеет характеристическое уравнение  $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$  или  $(k + 1)^3 = 0$ , откуда  $k = -1$  — корень третьей кратности и, следовательно, общее решение имеет вид  $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$ .

Для действительных  $p_l$ , если  $k_1 = \alpha + i\beta$  — комплексный корень кратности  $m$ , то и  $\bar{k}_1 = \alpha - i\beta$  — корень кратности  $m$ , которому соответствуют решения

$$e^{\bar{k}_1 x}, x e^{\bar{k}_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\bar{k}_1 x}, \quad (8')$$

возникающие в ряду (3). Запишем подробнее решения (8) и (8')

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha+i\beta)x}, x e^{(\alpha+i\beta)x}, \dots, x^{m-1} e^{(\alpha+i\beta)x}, \\ & e^{(\alpha-i\beta)x}, x e^{(\alpha-i\beta)x}, \dots, x^{m-1} e^{(\alpha-i\beta)x}. \end{aligned}$$

Складывая их соответственно и деля на 2 или вычитая и деля на  $2i$ , получим две системы действительных решений уравнения (1)

$$\left. \begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

которыми заменяют комплексные функции (8) и (8') в ряду (3).

Остается заметить, что можно доказать, что если подобную замену совершить для всех кратных корней характеристического уравнения, то функции новой системы образуют линейно независимую систему решений уравнения (1) на любом интервале  $(a, b)$ .

**Пример 7.** Дифференциальное уравнение  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$  имеет характеристическое уравнение  $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$  или  $(k^2 + 1)^2 = 0$ , откуда  $k_1 = i$  и  $k_2 = -i$  — корни второй кратности. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$

**Лемма 1.** Если  $k_1$  есть корень характеристического уравнения  $R_n(k) = 0$  кратности  $m$ , то функции

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{k_1 x}$$

суть линейно независимые на любом интервале  $(a, b)$  решения дифференциального уравнения (1).

**Доказательство.** Линейная независимость указанных функций установлена в примере 4 § 1.15.

Так как  $k_1$  — корень кратности  $m$  многочлена  $R_n(k)$ , то  $R_n(k) = (k - k_1)^m \varphi(k)$ , где  $\varphi(k)$  — такой многочлен, что  $\varphi(k_1) \neq 0$ . Отсюда

$$R_n(k_1) = 0, R'_n(k_1) = 0, \dots, R_n^{(m-1)}(k_1) = 0. \quad (10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} L_n[x^j e^{kx}] &= L_n \left[ \frac{\partial^j}{\partial k^j} e^{kx} \right] = \frac{\partial^j}{\partial k^j} L_n[e^{kx}] = \frac{\partial^j}{\partial k^j} [e^{kx} R_n(k)] = \\ &= \sum_{s=0}^j C_s \frac{\partial^{j-s} e^{kx}}{\partial k^{j-s}} \cdot \frac{d^s R_n(k)}{dk^s}, \end{aligned}$$

где  $C_s$  — некоторые постоянные числа. Отсюда, если  $j \leq m - 1$ , а  $k = k_1$ , в силу (10) получаем

$$L_n \left[ x^j e^{k_1 x} \right] = 0$$

и лемма доказана.

**Замечание.** Из изложенного выше вытекает, что если  $k_j$  — корень характеристического уравнения кратности  $l_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ;  $\sum_{j=1}^m l_j = n$ ), то фундаментальная система

решений уравнения (1) состоит из функций

$$e^{k_j x}, x e^{k_j x}, \dots, x^{l_j-1} e^{k_j x} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Если некоторый корень  $k_j$  является комплексным ( $k_j = \alpha_j + j\beta_j$ ,  $\beta_j \neq 0$ ), то этому корню, совместно с корнем  $\bar{k}_j$ , соответствует группа действительных функций

$$e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \dots, x^{l_j-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$

$$e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \dots, x^{l_j-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x.$$

**1.16.2. Уравнение Эйлера.** Уравнение с переменными коэффициентами вида

$$x^n y^{(n)} + p_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 x y' + p_0 y = 0,$$

где  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  — постоянные числа, называется *уравнением Эйлера*. С помощью замены  $x = e^t$  это уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. В самом деле, имеем

$$y(x) = y(e^t) = v(t).$$

Отсюда

$$y'(x) = v'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = v'(t) \cdot e^{-t}; \quad xy'(x) = v'(t);$$

$$y''(x) = v''(t)e^{-2t} - v'(t)e^{-2t}; \quad x^2 y''(x) = v''(t) - v'(t); \dots$$

Подставляя эти значения, получим уравнение с постоянными коэффициентами относительно функции  $v(t)$ . Частными решениями этого уравнения, как мы показали выше, являются функции вида  $e^{kt} = x^k$  или  $t^j e^{kt} = x^k \ln^j x$ ,

где  $k$  – корень (простой и кратный) соответствующего характеристического уравнения. Таким образом, частные решения уравнения Эйлера сразу можно искать в форме  $x^k$ ,  $x^k \ln^j x$ .

**Пример 8.** Решим конкретное уравнение Эйлера  $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ . Будем искать частные решения в виде  $y = x^k$ , тогда

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Подставляя эти значения производных, получаем

$$x^2 k(k-1)x^{k-2} + 3kx \cdot x^{k-1} + x^k = x^k [k(k-1) + 3k + 1] = 0.$$

Отсюда, если  $x \neq 0$ , то  $k(k-1) + 3k + 1 = 0$ . Последнее уравнение имеет корень  $k = -1$  второй кратности. Значит,  $y = 1/x$  – решение уравнения Эйлера. Другое решение –  $y = (\ln x)/x$ , в чем можно убедиться непосредственно. Так как  $1/x$  и  $(\ln x)/x$  линейно независимы (их определитель Вронского равен  $1/x^2 \neq 0$ ), то

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 \frac{\ln x}{x}$$

– общее решение данного уравнения Эйлера.

## § 1.17. Метод вариации постоянных

Рассмотрим неоднородное уравнение  $n$ -го порядка

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты  $p_i = p_i(x)$  и правая часть  $f(x)$  – заданные непрерывные функции на интервале  $(a, b)$ .

Допустим, что нам известна фундаментальная система решений  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  соответствующего однородного уравнения

$$L_n[y] = 0 \quad (2)$$

Как мы показали в § 1.15 (формула (6)), общее решение уравнения (1) равно сумме общего решения уравнения (2) и какого-либо решения уравнения (1).

Решение неоднородного уравнения (1) можно получить *методом вариации постоянных*, если известно общее решение однородного уравнения (2). Разъясним этот метод



на примере уравнения третьего порядка.

Итак, пусть задано линейное уравнение третьего порядка

$$y''' + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = f(x). \quad (3)$$

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x), \quad (4)$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – линейно независимые решения уравнения (2)

$$(L[y_i] = 0, i = 1, 2, 3).$$

Будем искать решение неоднородного уравнения (3) в виде суммы (4), где  $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$  – некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые надо найти. Наложим на искомые функции  $C_i(x)$  два условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 C_i'(x) y_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 C_i'(x) y_i'(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Тогда будет

$$y' = \sum_{i=1}^3 C_i y_i' + \sum_{i=1}^3 C_i' y_i = \sum_{i=1}^3 C_i y_i',$$

$$y'' = \sum_{i=1}^3 C_i y_i'' + \sum_{i=1}^3 C_i' y_i' = \sum_{i=1}^3 C_i y_i'',$$

$$y''' = \sum_{i=1}^3 C_i y_i''' + \sum_{i=1}^3 C_i' y_i''.$$

Подставив эти производные и саму функцию  $y$  в (3), получим

$$\sum_{i=1}^3 C_i y_i''' + \sum_{i=1}^3 C_i' y_i'' + p_2 \sum_{i=1}^3 C_i y_i'' + p_1 \sum_{i=1}^3 C_i y_i' + p_0 \sum_{i=1}^3 C_i y_i = f(x),$$

или

$$C_1(y_1''' + p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1) + C_2(y_2''' + p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2) + C_3(y_3''' + p_2y_3'' + p_1y_3' + p_0y_3) + \sum_{i=1}^3 C'_iy_i'' = f(x).$$

Но выражения в скобках в левой части этого равенства равны нулю, поэтому

$$\sum_{i=1}^3 C'_iy_i'' = f(x). \quad (6)$$

Мы получили уравнение (6) и два уравнения (5) с коэффициентами  $y_i$ ,  $y_i'$ ,  $y_i''$  и правой частью  $f(x)$ , которые непрерывны на  $(a, b)$ . Эти три уравнения образуют линейную алгебраическую систему относительно неизвестных  $C'_1$ ,  $C'_2$ ,  $C'_3$  с определителем, не равным нулю, потому что это есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Поэтому данная система имеет единственное решение

$$C'_i(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\varphi_i$  — непрерывные на  $(a, b)$  функции. Отсюда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx. \quad (7)$$

При этом функции  $C_i(x)$  имеют на  $(a, b)$  непрерывную производную. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x),$$

где функции  $C_i(x)$  определяются равенствами (7).

**Пример.**  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ ,  $R_2(k) = k^2 - 3k + 2 = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  — корни характеристического уравнения; общее решение однородного уравнения  $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ .

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Составим систему (5), (6):

$$\left. \begin{aligned} C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} &= 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)2 \cdot e^{2x} &= e^{3x}, \end{aligned} \right\} (W[y_1, y_2] = e^{3x} \neq 0).$$

Решая систему, имеем  $C_1'(x) = -e^{2x}$ ,  $C_2'(x) = e^x$ . Отсюда  $C_1(x) = -e^{2x}/2$ ,  $C_2(x) = e^x$  и частное решение

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}e^{2x}e^x + e^xe^{2x} = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

## § 1.18. Частное решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Приложения

1.18.1. Методы нахождения частных решений. Рассмотрим неоднородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y = f(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1)$$

где правая часть имеет специальный вид  $f(x) = e^{k_0x}$  или более общий вид

$$f(x) = x^{l-1}e^{k_0x} \text{ или еще } x^{l-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\text{или } x^{l-1}e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Нас будут интересовать способы нахождения частного решения уравнения (1). Это имеет значение, потому что, для того чтобы получить общее решение уравнения (1), надо найти какое-либо его частное решение и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения. Последнее мы умеем находить (см. § 1.16).

Рассмотрим сначала самый простой случай  $f(x) = a e^{k_0x}$ . Характеристический многочлен уравнения (1) имеет вид

$$R_n(k) = k^n + p_{n-1}k^{(n-1)} + \dots + p_0.$$

Если  $k_0$  не является корнем характеристического уравнения

$$R_n(k) = 0, \quad (2)$$

то частное решение уравнения

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y = a e^{k_0x} \quad (3)$$

можно найти в виде функции

$$y = A e^{k_0x}, \quad (4)$$

где  $A$  – постоянная. Подставив эту функцию в уравнение (3), получим  $AR_n(k_0)e^{k_0x}$ , откуда после сокращения на (не равный нулю!) множитель  $e^{k_0x}$  получаем  $AR_n(k_0) = a$  или

$$A = a/R_n(k_0), \quad (5)$$

и число  $A$  найдено.

**Пример 1.** Уравнение

$$y'' + y = e^x \quad (6)$$

имеет характеристическое уравнение

$$R_2(k) = k^2 + 1 = 0.$$

Число  $k_0 = 1$  не является корнем характеристического уравнения ( $R_2(k_0) = R_2(1) = 2 \neq 0$ ), поэтому частное решение (6) можно искать в виде  $y = Ae^x$ . Согласно (5)  $A = -(R_2(1))^{-1} = 1/2$ . Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y = \frac{1}{2}e^x + C_1\cos x + C_2\sin x,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

**Пример 2.** Найдем частное решение уравнения

$$y'' + y = \cos 2x. \quad (7)$$

Рассматриваем два уравнения

$$y''_1 + y_1 = \cos 2x, \quad (7')$$

$$y''_2 + y_2 = \sin 2x. \quad (7'')$$

Умножаем второе уравнение на  $i$  и полученное уравнение складываем с первым уравнением. При этом полагаем  $y = y_1 + iy_2$  и учитываем равенство  $e^{i2x} = \cos 2x + i\sin 2x$ . В результате получим

$$y'' + y = e^{i2x}. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет корни  $\pm i$ . Оба они отличны от числа  $2i$ . Поэтому, как было доказано выше, частное решение уравнения (8) можно найти в виде функции  $A e^{i2x}$ , где  $A$  — постоянная.

Подставляя эту функцию в (8) и рассуждая, как выше, получим

$$A = \frac{1}{(2i)^2 + 1} = \frac{1}{-4 + 1} = -\frac{1}{3}.$$

Итак, функции

$$y = -\frac{1}{3} e^{i2x}$$

есть частное решение дифференциального уравнения (8). Ее действительная часть

$$y_1 = -\frac{1}{3} \cos 2x$$

есть решение дифференциального уравнения (7'), или, что все равно, решение данного уравнения (7).

Попутно мы получили частное решение уравнения (7''), или, что все равно, уравнения

$$y'' + y = \sin 2x.$$

Общее решение уравнения (7) записывается по формуле

$$y = A \cos x + B \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x,$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные.

Если  $k_0$  есть корень характеристического уравнения (2), то уравнение (3), очевидно, не имеет решения вида (4). В этом случае нам поможет следующая лемма.

**Лемма 1.** *Если  $k_0$  — действительный или комплексный корень кратности  $t$  характеристического уравнения (2), то частное решение дифференциального уравнения (3) можно найти в виде*

$$y = Ax^t e^{k_0 x},$$

где  $A$  — некоторая постоянная.

Приведем сначала пример.

Пример 3.

$$y'' - 2y' + y = e^x. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение есть  $k^2 - 2k + 1 = 0$ , или  $(k - 1)^2 = 0$ . Число  $k_0 = 1$  есть его корень кратности 2. Поэтому, согласно лемме 1, решение надо искать в виде

$$y = Ax^2e^x.$$

Имеем

$$y' = A \cdot 2xe^x + Ax^2e^x, \quad y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x.$$

Подставляя в (9), получим

$$2Ae^x = e^x.$$

Следовательно,  $A = 1/2$  и общее решение есть

$$y = \frac{1}{2}x^2e^x + (C_1 + C_2x)e^x.$$

Доказательство леммы 1. Применим к левой и правой частям дифференциального уравнения (3) операцию (оператор)  $\frac{d}{dx} - k_0$   $\left( \left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) u = \frac{du}{dx} - k_0 u \right)$ . Тогда в правой части будем иметь

$$\left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) a e^{k_0 x} = \frac{d}{dx} (a e^{k_0 x}) - k_0 a e^{k_0 x} = 0.$$

Поэтому

$$\left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) a e^{k_0 x} = 0.$$

Поэтому

$$\left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) L_n[y] = 0. \quad (10)$$

Мы получили дифференциальное уравнение  $(n + 1)$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$(k - k_0)R_n(k) = 0. \quad (11)$$

Уравнение  $R_n(k) = 0$  и уравнение (11) имеют одни и те же корни, но корень  $k_0$  в уравнении (11) кратности  $m + 1$  (на 1 больше). Общее решение однородного уравнения

$$L_n[y] = 0 \quad (12)$$

запишем так:

$$v = (C_1 + C_2x + \dots + C_mx^{m-1})e^{k_0x} + \sum_{j=m+1}^n C_j y_j(x),$$

где  $y_{m-1}, \dots, y_n$  — решения, соответствующие корням характеристического уравнения, не равным  $k_0$ , если таковые есть. Общее же решение уравнения (10) можно записать в виде

$$z = Ax^m e^{k_0x} + v.$$

Всякое решение  $y$  уравнения (3) есть решение уравнения (10), и потому

$$y = Ax^m e^{k_0x} + v \quad (13)$$

для некоторого набора постоянных

$$C_1, C_2, \dots, C_n, A. \quad (14)$$

Мы показали, что если  $y$  есть решение уравнения (3)  $L_n[y] = a e^{k_0x}$ , то можно подобрать постоянные (14) так, что  $y = Ax^m e^{k_0x} + v$ . Теперь для указанных постоянных (14) будем иметь

$$L_n[Ax^m e^{k_0x}] = L_n[y - v] = L_n[y] - L_n[v] = a e^{k_0x} - 0 = a e^{k_0x}.$$

Этим доказано, что есть такое число  $A$ , для которого функция

$$y = Ax^m e^{k_0x}$$

есть решение неоднородного дифференциального уравнения (3). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь два дифференциальных уравнения

$$y_1^{(n)} + p_{n-1}y_1^{(n-1)} + \dots + p_0y_1 = ax^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad (15)$$

$$y_2^{(n)} + p_{n-1}y_2^{(n-1)} + \dots + p_0y_2 = ax^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad (16)$$

где  $\alpha, \beta, p_i$  — действительные числа, а  $l$  — натуральное. Умножим второе из них на  $i$  и сложив с первым, получим уравнение

$$z^{(n)} + p_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + p_0z = ax^{l-1}e^{k_0x} \quad (17)$$

$$(z = y_1 + iy_2, k_0 = \alpha + i\beta).$$

Вместо двух уравнений (15) и (16) с неизвестными функциями  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  мы получили одно уравнение (17) с неизвестной комплексной функцией  $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ . Если решение  $z = y_1 + iy_2$  уравнения (17) найдено, то действительная его часть  $y_1$  будет решением уравнения (15), а мнимая  $y_2$  — уравнения (16).

При  $l = 1$  уравнение (17) было уже исследовано.

**Пример 4.** Дано уравнение

$$y'' + y = \sin x. \quad (18)$$

Наряду с ним рассмотрим уравнение

$$y'' + y = \cos x. \quad (19)$$

Имеем

$$y_1'' + y_1 = \cos x, \quad y_2'' + y_2 = \sin x.$$

Умножив второе уравнение на  $i$  и сложив с первым, получим

$$z'' + z = e^{ix}, \quad z = y_1 + iy_2. \quad (20)$$

Число  $k_0 = i$  есть корень кратности 1 характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в виде  $z = Axe^{ix}$ . Имеем

$$z' = Ae^{ix} + Aixe^{ix}, \quad z'' = 2Aie^{ix} - Axe^{ix}.$$

Подставляя  $z$ ,  $z'$ ,  $z''$  в уравнение (20), получим

$$2Aie^{ix} = e^{ix}, \quad A = 1/(2i) = -i/2.$$

Частное решение уравнения (20) имеет вид

$$z = -\frac{ix}{2} e^{ix} = -\frac{ix}{2} (\cos x + i \sin x) = \frac{x}{2} \sin x - i \frac{x}{2} \cos x.$$

Мнимая часть

$$y = -\frac{x}{2} \cos x$$

есть частное решение данного уравнения (18). Действительная же часть есть частное решение уравнения (19).

Случай  $l > 1$  (для уравнения (17)) предусматривается в следующей лемме.



Лемма 2. Частное решение уравнения (17) можно найти среди функций вида

$$(C_m x^m + \dots + C_{m+l-1} x^{m+l-1}) e^{k_0 x}, \quad (21)$$

где  $m$  – кратность корня  $k_0$  характеристического уравнения  $R_n(k) = 0$ , а  $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+l-1}$  – постоянные.

Если  $k_0$  не есть корень уравнения  $R_n(k) = 0$ , то все же формально можно считать, что  $k_0$  есть корень только кратности 0. В этом случае надо в формуле (21) считать  $m = 0$  и частное решение надо искать в виде

$$(C_0 + C_1 x + \dots + C_{l-1} x^{l-1}) e^{k_0 x}$$

Доказательство ведется аналогично доказательству леммы 1.

Общее решение однородного уравнения  $L_n[z] = 0$  записываем так:

$$v = (C_0 + C_1 x + \dots + C_{m-1} x^{m-1}) e^{k_0 x} + \sum_{j=m+1}^n C_j z_j(x), \quad (22)$$

где  $z_{m-1}, \dots, z_n$  – решения, соответствующие корням, не равным  $k_0$ , если таковые имеются.

Подвергнем уравнение (17) операции  $\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l$ . Так как

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - k_0\right) (ax^{l-1} e^{k_0 x}) &= \frac{d}{dx} (ax^{l-1} e^{k_0 x}) - k_0 ax^{l-1} e^{k_0 x} = \\ &= a(l-1)x^{l-2} e^{k_0 x}, \end{aligned}$$

то

$$(ax^{l-1} e^{k_0 x}) = \left(\frac{d}{dx} - k_0\right) (a(l-1)! x^{l-2} e^{k_0 x}) = 0.$$

Поэтому мы получаем однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l L_n[z] = 0. \quad (23)$$

Его характеристическое уравнение имеет те же корни, что и уравнение  $R_n(k) = 0$ , но кратность  $k_0$  больше на число  $l$ . Поэтому общее решение уравнения (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
z &= (C_0 + C_1x + \dots + C_{m+l-1}x^{m+l-1})e^{k_0x} + \sum_{k=m+1}^n C_k z_k = \\
&= v + (C_mx^m + \dots + C_{m+l-1}x^{m+l-1})e^{k_0x}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Всякое решение  $z$  уравнения (17) есть решение уравнения (23), и потому оно может быть записано в виде (24). Но тогда

$$\begin{aligned}
L_n[(C_mx^m + \dots + C_{m+l-1}x^{m+l-1})e^{k_0x}] &= L_n[z - v] = \\
&= L_n[z] - L_n[v] = ax^{l-1}e^{k_0x},
\end{aligned}$$

что показывает, что функция (21) при подходящем выборе постоянных  $C_m, \dots, C_{m+l-1}$  есть частное решение уравнения (17).

**Пример 5.**  $y'' - y = xe^x$  ( $k_0 = 1, l = 2$ ).

Характеристическое уравнение  $k^2 - 1 = 0$  имеет корни  $k_{1,2} = \pm 1$ . Число  $k_0 = 1$  является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому, согласно лемме 2, частное решение ищем в виде

$$y = (ax + Bx^2)e^x.$$

Имеем

$$y' = [A + (A + 2B)x + Bx^2]e^x,$$

$$y'' = [2(A + B) + (A + 4B)x + Bx^2]e^x.$$

Подставляя эти значения в уравнение, получим

$$e^x(2A + 2B + 4Bx) = xe^x,$$

откуда

$$2A + 2B = 0, \quad 4B = 1,$$

т. е.

$$A = -1/4, \quad B = 1/4.$$

Значит, частное решение нашего уравнения будет

$$y = (-x + x^2)e^x/4,$$

и общее решение

$$y = \left( -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} \right) e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

**З а м е ч а н и е.** Если функция является решением уравнения

$$L_n[y] = f_i(x) \quad (i = 1, \dots, q),$$

то функция  $y = \sum_{i=1}^q y_i$  является решением уравнения

$$L_n[y] = L_n \left[ \sum_{i=1}^q y_i \right] = \sum_{i=1}^q L_n[y_i] = \sum_{i=1}^q f_i(x).$$

Отсюда и из сказанного выше ясно, что форма частного решения неоднородного уравнения  $L_n[y] = f(x)$  с правой частью вида

$$f(x) = P_{m-1}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + Q_{m-1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

где  $P_{m-1}(x)$ ,  $Q_{m-1}(x)$  — некоторые алгебраические многочлены степени не выше  $(m-1)$ , совпадает с видом правой части, если  $\alpha \pm i\beta$  не являются корнями характеристического уравнения  $R_n(k) = 0$ .

Если же числа  $\alpha \pm i\beta$  являются корнями характеристического уравнения с кратностью  $l$ , то частное решение нужно искать также в виде правой части, но степени алгебраических многочленов надо повысить на  $l$  единиц.

Отметим, что если в первой части присутствует, например, слагаемое  $Q_{m-1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ , то частное решение необходимо искать в виде суммы

$$R_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + R_2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где  $R_1(x)$ ,  $R_2(x)$  — многочлены соответствующих степеней.

**П р и м е р 6.** Написать форму частного решения уравнения

$$y'' + y = x \sin x.$$

Характеристическое уравнение  $k^2 + 1 = 0$  имеет корни  $\pm i$ . Правой части  $x \sin x$  соответствует число  $k_0 = \alpha \pm i\beta = 0 \pm i1 = \pm i$ . Эти числа являются корнями кратности 1

характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в форме

$$y(x) = (Ax + Bx^2)\sin x + (Cx + Dx^2)\cos x.$$

**Пример 7.**  $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = x^2e^x$ ; характеристическое уравнение  $k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 = (k - 1)^4 = 0$ . Правой части  $x^2e^x$  соответствует число  $k_0 = \alpha = 1$ , являющееся корнем четвертой кратности характеристического уравнения, значит, частное решение надо искать в форме

$$y(x) = (Ax^4 + Bx^5 + Cx^6)e^x.$$

**1.18.2. Дифференциальное уравнение колебания пружины.** На рис. 16 изображена подвешенная вертикально пружина. К нижнему ее концу прикреплен шарик, имеющий массу  $m$ . Изображена также координатная ось  $y$ , направленная вертикально вниз. Считаем, что начало  $O$  оси координат совпадает с центром шарика, когда пружина находится в ненапряженном состоянии. Однако в момент времени  $t = t_0$  она выведена из состояния покоя мгновенным ее сжатием или растяжением, сопровождаемым, быть может, еще приданием шарiku импульса (мгновенной скорости) в вертикальном направлении. Благодаря этому при  $t \geq t_0$  пружина совершает вертикальные колебания.

Координата центра шарика есть функция от времени  $t$  ( $y = y(t)$ ). Поставим задачу найти эту функцию.

Ускорение движения центра шарика есть производная второго порядка  $y'' = y''(t)$  от  $y(t)$ . По закону Ньютона произведение  $my''$  массы шарика на ускорение его центра равно действующей на него силе. Если пренебречь весом шарика и сопротивлением воздуха, то придется учесть только силу напряжения в пружине. По закону Гука эта сила равна  $-\mu y$ , где  $\mu$  — положительный коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины. Если  $y > 0$ , то пружина растянута и сила напряжения направлена

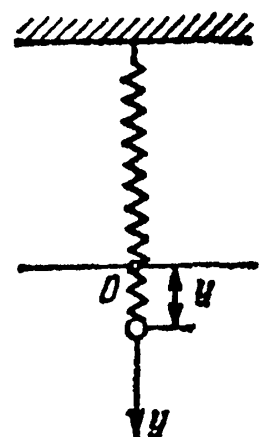


Рис. 16

вверх, т. е. в наших обозначениях отрицательна, а если  $y < 0$ , то пружина сжата и указанная сила направлена вниз, т. е. положительна. В обоих случаях сила равна  $-\mu y$ .

Итак справедливо равенство

$$my'' = -\mu y \quad (25)$$

или

$$y'' + k^2 y = 0 \quad \left( k^2 = \frac{\mu}{m} \right). \quad (26)$$

Мы видим, что искомая функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка (26).

Общее его решение, как мы знаем, имеет вид

$$y = A \cos kt + B \sin kt, \quad (27)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

При функции вида (27) говорят, что она описывает гармоническое колебание с частотой  $k$ .

Задача Коши для уравнения (26):  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  выражает, что мы хотим найти частное движение, соответствующее тому случаю, когда в момент  $t = 0$  центр шарика перемещен в точку  $y = y_0$  и ему в этот момент придан импульс  $y' = y'_0$ .

Легко подсчитать, что в этом случае

$$A = y_0, \quad B = \frac{y'_0}{k}$$

и, следовательно, движение центра шарика описывается функцией

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y'_0}{k} \sin kt.$$

Если учитывать вес шарика, то к правой части уравнения (25) надо еще добавить величину  $mg$ , где  $g$  — ускорение земного притяжения. И тогда дифференциальное уравнение движения центра шарика запишется так:

$$y'' + k^2 y = g. \quad (28)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = A \cos kt + B \sin kt + \frac{g}{k^2}, \quad (29)$$

где  $A, B$  – произвольные постоянные. Ведь решение есть сумма общего решения ( $A\cos kt + B\sin kt$ ) соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Этот случай нахождения частного решения предусмотрен формулами (2)–(4) ( $k_0 = 0 \neq k$ ).

Из формулы (29) следует, что при  $t = 0$

$$y(0) = A + \frac{g}{k^2} = y_0, \quad y'(0) = Bk = y'_0.$$

Следовательно, задача Коши ( $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ ) приводит к решению

$$y = \left( y_0 - \frac{g}{k^2} \right) \cos kt + \frac{y'_0}{k} \sin kt + \frac{g}{k^2}.$$

Мы видим, что центр шарика описывает гармонические колебания возле точки, имеющей ординату  $y = g/k^2$ .

Но наши рассуждения будут еще ближе к действительности, если мы учтем силу сопротивления среды (воздуха) и трения, возникающего в пружине. Опыт показывает, что эта сила равна  $-vy'$ , где  $v$  – положительный коэффициент, характеризующий среду и пружину.

Теперь уже дифференциальное уравнение движения (центра шарика) будет иметь вид

$$my'' = -\mu y - vy' + mg$$

или

$$y'' + \lambda y' + k^2 y = g \left( k^2 = \frac{\mu}{m}, \lambda = \frac{v}{m} \right). \quad (30)$$

Из физических соображений мы должны ожидать, что это движение совершает затухающие колебания. Так оно и есть.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (30) имеет вид

$$s^2 + \lambda s + k^2 = 0,$$

откуда

$$s_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4k^2}}{2}.$$

Если  $\lambda^2 < 4k^2$ , что на практике обычно имеет место, то получим два комплексных корня

$$s_{1,2} = -\alpha \pm i\beta \left( \alpha = \frac{\lambda}{2} > 0, \beta = \frac{1}{2} \sqrt{4k^2 - \lambda^2} \right).$$

Частное решение уравнения (30) можно найти в виде постоянной  $c$ . Очевидно  $k^2 c = g$ , и, следовательно, общее решение уравнения (30) имеет вид

$$y = e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) + \frac{g}{k^2} \quad (\alpha > 0!). \quad (31)$$

Как мы и ожидали, центр шарика совершает затухающие колебания. Эти колебания совершаются на оси  $y$  вокруг точки  $y = g/k^2$ . (Напомним, что начало координат  $O$  помещено в точку, в которой находится центр шарика, когда пружина не напряжена.)

Очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{g}{k^2}.$$

Рассмотрим еще движение (центра шарика), описываемое дифференциальным уравнением

$$y'' + y = \sin t. \quad (32)$$

Мы, таким образом, решили пренебречь сопротивлением среды (т. е. считаем  $\lambda = 0$ ). Предполагаем также, что  $k^2 = 1$  и что к центру шарика приложена внешняя сила, равная  $m \sin t$ .

Общее решение уравнения (32) имеет вид (см. выше пример 3)

$$y = A \cos t + B \sin t - \frac{t}{2} \cos t.$$

Функция  $A \cos t + B \sin t$  есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (32). На языке механики эта функция описывает *собственные колебания системы* (пружина, шарик). Эта функция ограниченная периодическая.

Функция  $-\frac{t}{2} \cos t$  есть частное решение уравнения (32).

На языке механики она описывает *вынужденное колеба-*

ние системы, т. е. колебание, вызванное внешней силой. В данном случае амплитуда вынужденного колебания с увеличением времени  $t$  растет к  $+\infty$ .

Решение уравнения (32) есть сумма соответствующего ему решения однородного уравнения и некоторого частного его решения. На языке механики в этом случае говорят, что колебание системы есть сумма собственного и вынужденного колебаний этой системы.

С математической точки зрения тот факт, что частное решение уравнения (32) имеет вид  $ct \cos t$ , где  $c$  – постоянная, объясняется тем, что число  $k_0 = i$  (см. пример 3) есть корень кратности 1 характеристического уравнения.

Механик этот факт выразил бы другими словами. Он сказал бы, что в данном случае частота собственного колебания системы равна частоте колебания внешней силы. Равенство этих частот, приводит к резонансу – система колеблется с той же частотой, но с неограниченно возрастающей при  $t \rightarrow +\infty$  амплитудой.

Другое дело, если указанные частоты различны, тогда резонанса нет. Например, в примере 2 указанные частоты различны и любое движение системы имеет ограниченную амплитуду.

## § 1.19. Системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство

При изучении закона движения материальной точки с массой  $m$  удобно пользоваться векторной формой записи уравнений. Итак, пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  – закон движения материальной точки в пространстве  $R^3$ , где  $t$  – время. Это значит, что в момент времени  $t$  точка имеет радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$ , или, что все равно, координаты  $\{x(t), y(t), z(t)\}$ . Если точка массы  $m$  движется под действием заданной силы (вектора)  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , то по закону Ньютона и механическому смыслу второй производной функция  $\mathbf{r}(t)$  должна удовлетворять уравнению движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (1)$$

Векторное уравнение (1) эквивалентно системе трех скалярных уравнений



$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $X, Y, Z$  – проекции вектора  $F$  на оси координат  $x, y, z$ .

Если считать неизвестными не только координаты точки  $x, y, z$ , но и проекции скорости

$$\frac{dr}{dt} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\},$$

то мы получим систему из шести уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= u, & m \frac{du}{dt} &= X(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{y} &= v, & m \frac{dv}{dt} &= Y(t, x, y, z, u, v, w), \\ \dot{z} &= w, & m \frac{dw}{dt} &= Z(t, x, y, z, u, v, w). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Векторное уравнение (1) можно также записать в виде системы двух векторных уравнений, если скорость  $V = \frac{dr}{dt}$  считать неизвестной векторной функцией:

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad m \frac{dV}{dt} = F(t, r, V), \quad (1')$$

где  $V$  – вектор с проекциями  $u, v, w$ .

Если ввести в рассмотрение вектор

$$R(t) = \{x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\},$$

то уравнение (1) или система (3) эквивалентны одному векторному уравнению первого порядка

$$\frac{dR}{dt} = \Phi(t, x, y, z, u, v, w) \quad (4)$$

в шестимерном пространстве, причем вектор

$$\Phi = \left\{ u, v, w, \frac{1}{m} X, \frac{1}{m} Y, \frac{1}{m} Z \right\}.$$

Шестимерное пространство точек

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv (r_x, r_y, r_z, V_x, V_y, V_z)$$

в физике называют *фазовым*, а кривую  $R(t)$  в шестимерном пространстве, являющуюся решением (4), называют *фазовой траекторией*.

Фазовое пространство – это пространство состояний движения точки по кривой.

Первые три координаты  $R(t)$  характеризуют положение точки в трехмерном пространстве ( $r(t)$ ), а остальные три координаты  $R(t)$  характеризуют ее скорость  $\dot{r}(t)$ .

Приведенная терминология дает так называемую *кинематическую интерпретацию системы уравнений*.

Систему (3), или, что то же самое, (4) называют *динамической системой*.

Для выделения одной траектории необходимо задать начальные условия:  $R(t_0) = R_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ , т. е. начальное положение точки и ее начальную скорость. Другими словами, интегральная кривая  $R(t)$  должна проходить через точку  $R_0$  шестимерного пространства.

Таким образом, физические задачи приводят нас к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, \dots, y_n) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5)$$

где  $y_k(t)$  – искомые функции, а  $f_k(t, y_1, \dots, y_n)$  – известные функции, заданные на некотором множестве точек  $(t, y_1, \dots, y_n)$   $(n + 1)$ -мерного пространства.

Нас будут интересовать решения  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  системы (5), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{10}, \dots, y_n(t_0) = y_{n0}, \quad (6)$$

где  $y_{10}, \dots, y_{n0}$  – заданная точка  $n$ -мерного пространства.

Систему (5) (решенную относительно производных искомых функций!) называют *нормальной* (см. § 1.12, 1.13).

Если функции  $f_k$  не зависят явно от независимого переменного  $t$ , то система (5) называется *автономной нормальной системой*

$$\dot{y}_k = f_k(y_1, \dots, y_n) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Если ввести векторы в  $n$ -мерном пространстве

$$\mathbf{y} = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}, \quad \mathbf{y}_0 = \{y_{10}, \dots, y_{n0}\},$$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \{f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n)\},$$

то систему (5) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \quad (5')$$

а начальные условия (6) – в форме

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (6')$$

Автономную систему можно записать так:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{F} = \{f_1(\mathbf{y}), \dots, f_n(\mathbf{y})\}. \quad (7')$$

Автономную систему можно интерпретировать следующим образом. В каждой точке  $(y_1, \dots, y_n)$  некоторого множества  $n$ -мерного пространства определен вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \{f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)\}.$$

Этим определено на указанном множестве *поле векторов*.

Решение  $\mathbf{y}(t)$  описывает определенную траекторию движения точки в  $n$ -мерном пространстве, причем вектор скорости  $\dot{\mathbf{y}}(t)$  в момент ее прохождения через  $(y_1, \dots, y_n)$  совпадает с вектором  $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ .

Пространство размерности  $n$  точек  $(y_1, \dots, y_n)$ , в котором интерпретируются решения автономной системы (7') в виде траекторий, называется *фазовым пространством системы*.

Траектории  $\mathbf{y}(t)$  называются *фазовыми траекториями*, векторы  $\mathbf{F}(\mathbf{y})$  – *фазовыми скоростями*.

Вопрос существования решения нормальной системы был рассмотрен в § 1.12.



Легко проверить следующие свойства:

1) Если  $C$  – постоянная матрица, то  $\frac{dC}{dt} = 0$ , где  $0$  – нулевая матрица, все ее элементы нули.

2) Если матрицы  $A(t)$  и  $B(t)$  одного размера, то

$$\frac{d}{dt} [A(t) + B(t)] = \dot{A}(t) + \dot{B}(t).$$

3) Если для матриц  $A(t)$  и  $B(t)$  выполнимо умножение, то

$$\frac{d}{dt} [A(t)B(t)] = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t).$$

4) Пусть  $A^{-1}(t)$  – обратная матрица для  $A(t)$ , т. е.

$$A^{-1}(t)A(t) = A(t)A^{-1}(t) = E,$$

где  $E$  – единичная матрица. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t) + A(t)\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = 0,$$

$$A(t)\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -\dot{A}(t)A^{-1}(t).$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t).$$

Аналогично можно ввести понятие *интеграла от матрицы*, а именно, это есть матрица, элементы которой суть интегралы от элементов исходной матрицы:

$$\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau = \left( \int_{t_0}^t a_{kl}(\tau)d\tau \right) \quad (t_0, t \in [a, b]).$$

Данное понятие обладает свойствами, сходными с обычными свойствами интегралов от функций. Мы отметим лишь одно свойство – аналог формулы Ньютона–Лейбница<sup>1</sup>: если  $F(t)$  и  $\Phi(t)$  матрицы и  $F(t) = \Phi'(t)$ , то

$$\int_{t_0}^t F(\tau)d\tau = \Phi(t) - \Phi(t_0).$$

---

<sup>1</sup> И. Ньютон (1642–1727) – великий английский физик, механик, астроном и математик. Г. В. Лейбниц (1646–1716) – великий немецкий математик и философ.



следует, что  $C_1 = \dots = C_n = 0$ .

Так как векторное уравнение (6) эквивалентно  $n$  скалярным равенствам

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_{11}(t) + \dots + C_n y_{1n}(t) &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ C_1 y_{n1}(t) + \dots + C_n y_{nn}(t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

то из того, что определитель

$$W(t) = |y_{kl}(t)| \quad (7)$$

не равен нулю хотя бы для некоторого значения  $t$ , уже следует, очевидно, линейная независимость системы (4) вектор-функций.

Определитель  $W(t)$  называется *определителем Вронского системы (4) вектор-функций*.

Если система векторов (4) линейно независима на  $(a, b)$  и эти векторы являются решениями системы (1') с непрерывными коэффициентами, то можно доказать, что  $W(t) \neq 0$  для всех  $t \in (a, b)$ .

Таким образом, *условие  $W(t) \neq 0$  для всех  $t \in (a, b)$ , является необходимым и достаточным условием линейной независимости на  $(a, b)$  решений (4) системы (1) с непрерывными коэффициентами.*

Итак, для того чтобы получить общее решение однородной системы (1), надо найти  $n$  линейно независимых решений (4) системы (1). Сумма (5), где  $C_1, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, есть общее решение системы (1).

Отметим, что решения  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  системы (1) существуют на том же интервале  $(a, b)$ , где определены и непрерывны коэффициенты  $a_{kl}(t)$  системы (1).

Систему из  $n$  линейно независимых на  $(a, b)$  решений системы (1) принято называть *фундаментальной системой решений системы (1)*.

Эту систему можно характеризовать квадратной матрицей

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \dots y_{1n}(t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{n1}(t) \dots y_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

которая называется *фундаментальной матрицей системы (1)*.

Таким образом, в фундаментальной матрице решения (4) располагаются по столбцам. Обратим внимание, что в записи  $y_{jk}(t)$  первый индекс  $j$  обозначает номер координаты, а второй  $k$  – номер решения.

Покажем, что фундаментальная матрица  $Y(t)$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t). \quad (8)$$

Так как функции  $y_{sk}(t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ) удовлетворяют  $j$ -му уравнению системы (1), то

$$\frac{dy_{jk}(t)}{dt} = \sum_{s=1}^n a_{js}(t)y_{sk}(t).$$

Следовательно, согласно правилу умножения матриц (в данном случае квадратных), имеем

$$\dot{Y}(t) = \left( \frac{dy_{jk}(t)}{dt} \right) = \left( \sum_{s=1}^n a_{js}(t)y_{sk}(t) \right) = A(t)Y(t).$$

что и требовалось доказать.

Обратно, если матрица  $Y(t) = (y_{jk}(t))$  удовлетворяет матричному уравнению (8), то ее столбцы

$$y^k(t) = \text{colon}[y_{1k}(t), \dots, y_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n)$$

представляют решения линейной однородной системы (1).

Если при этом

$$|Y(t)| = W(t) \neq 0,$$

то матрица  $Y(t)$  является фундаментальной.

В самом деле

$$y^k(t) = Y(t)e_k,$$

где  $e_k = \text{colon}[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ . Умножая справа на  $e_k$  уравнение (8), получаем

$$\frac{dY(t)}{dt} e_k = \frac{d}{dt} [Y(t)e_k] = A(t)[Y(t)e_k],$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} y^k(t) = A(t)y^k(t) \quad (k = 1, \dots, n).$$



Если  $Y(t)$  – фундаментальная матрица системы (1), то общее решение (5) системы (1) можно коротко записать в виде

$$y(t) = Y(t)C, \quad (9)$$

где  $C = \text{colon}[C_1, \dots, C_n]$  – постоянная матрица-столбец с произвольными элементами.

Полагая в тождестве (9)  $t = t_0$ , будем иметь

$$y(t_0) = Y(t_0)C.$$

Отсюда

$$C = Y^{-1}(t_0)y(t_0).$$

Следовательно,

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y(t_0).$$

Матрица

$$Y(t)Y^{-1}(t_0) = K(t, t_0)$$

носит название *матрицы Коши*.

С помощью этой матрицы решение системы (1) можно записать так:

$$y(t) = K(t, t_0)y(t_0). \quad (10)$$

В частности, если фундаментальная матрица  $Y(t)$  нормирована при  $t = t_0$ , т. е.  $Y(t_0) = Y^{-1}(t_0) = E$ , где  $E$  – единичная матрица, то формула (10) принимает вид

$$y(t) = Y(t)y(t_0). \quad (11)$$

Существование такой нормированной матрицы вытекает из теоремы 2 § 1. 13.

### § 1.21. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Будем искать решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами  $a_{kl}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \\ &(-\infty < t < \infty), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (1')$$

где  $A = \|a_{kl}\|$  – заданная числовая матрица, в следующем виде:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \dots, y_n = \alpha_n e^{\lambda t}, \quad (2)$$

или

$$y = \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \dots, \alpha_n e^{\lambda t}\}. \quad (2')$$

Числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda$  подлежат определению.  
Конечно, числа

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

дают тривиальное решение системы (1):

$$y_1(t) \equiv 0, \dots, y_n(t) \equiv 0.$$

Но нас интересуют *нетривиальные решения*, соответствующие не равным нулю векторам

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Имеем

$$\frac{dy_j}{dt} = \alpha_j \lambda e^{\lambda t} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Подставляя функции  $y_i(t)$  и их производные в (1), после сокращения на  $e^{\lambda t}$  ( $e^{\lambda t} \neq 0$ ) и переноса членов в одну сторону, получим

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или в матричной форме

$$(A - \lambda E)\alpha = 0, \quad (3')$$

или

$$A\alpha = \lambda\alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , а

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица.

Для того чтобы система (3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением* система (1). Из уравнения (5) мы и находим те значения  $\lambda$ , при которых система (4) имеет нетривиальные решения  $\alpha$ .

Левая часть (5) есть многочлен степени  $n$  по переменной  $\lambda$ . С учетом кратности этот многочлен имеет  $n$  корней:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \quad (6)$$

Если все  $n$  нулей различны, то, подставляя каждый из них  $\lambda_j$  в систему (4) и решая ее, мы получим некоторый удовлетворяющий ей нетривиальный вектор

$$\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}). \quad (7)$$

Этот вектор определяется не однозначно — с точностью до скалярного множителя.

Из (4) видно, что  $\lambda_j$  являются собственными значениями матрицы (линейного преобразования)  $A$ , а векторы  $\alpha^{(j)}$  — собственными векторами  $A$ .

Векторы  $\alpha^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) линейно независимы, если все собственные значения различны. Доказательство можно провести по индукции.

Докажем, что любые  $k$  векторов этой системы линейно независимы между собой.

Для  $k = 1$  это очевидно, потому что каждый из векторов  $\alpha^{(j)}$  не тривиален. Пусть наше утверждение верно для  $k - 1$  векторов. Докажем его для  $k$  векторов.

Предположим противное. Пусть, например, первые  $k$  векторов нашей системы линейно зависимы. Тогда

$$\sum_{j=1}^k C_j \alpha^{(j)} = 0, \quad (8)$$

где хотя бы один из коэффициентов  $C_j$  отличен от нуля. Для определенности будем считать, что  $C_1 \neq 0$ . Применим линейное преобразование, порожденное матрицей  $A$ , к обеим частям (8):

$$A \left( \sum_{j=1}^k C_j \alpha^{(j)} \right) = \sum_{j=1}^k C_j \lambda_j \alpha^{(j)} = 0. \quad (9)$$

Умножая (8) на  $\lambda_k$  и вычитая из (9), получаем

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha^{(1)} + C_2(\lambda_2 - \lambda_k)\alpha^{(2)} + \dots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha^{(k-1)} = 0,$$

где  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$  при всех  $i \neq k$ .

Значит,  $C_1(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$ , и мы получили, что векторы  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}$  линейно зависимы, что противоречит предположению.

Итак, собственные векторы  $\alpha^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), отвечающие различным собственным числам  $\lambda_j$ , линейно независимы и определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю:

$$|\alpha^{(j)}_k| \neq 0^1.$$

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 14, теорема 1.

**З а м е ч а н и е 1.** Так как в  $n$ -мерном пространстве не может быть больше чем  $n$  линейно независимых векторов, то каждому собственному значению  $\lambda_j$  (если все они различны!) соответствует только один собственный вектор с точностью до постоянного множителя.

В результате получаем  $n$  вектор-функций – решений системы (1)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \left\{ \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, \alpha_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{y}^n(t) &= \left\{ \alpha_1^{(n)} e^{\lambda_n t}, \alpha_2^{(n)} e^{\lambda_n t}, \dots, \alpha_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

Вектор-функции (10) образуют линейно независимую систему на интервале  $(-\infty, \infty)$ , так как их определитель Вронского

$$W(t) = \exp(\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t) \cdot |\alpha_k^{(j)}| \neq 0.$$

Поэтому общее решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{y}^j(t), \quad (11)$$

где  $C_j$  – произвольные постоянные. В развернутом виде общее решение можно записать:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{j=1}^k C_j \alpha_1^{(j)} \exp(\lambda_j t), \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(t) &= \sum_{j=1}^k C_j \alpha_n^{(j)} \exp(\lambda_j t). \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

**З а м е ч а н и е 2.** На практике, вместо того чтобы находить векторы  $\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)})$  из линейных систем (4), ищут общее решение системы (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{j=1}^n a_1^{(j)} \exp(\lambda_j t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t) &= \sum_{j=1}^n a_n^{(j)} \exp(\lambda_j t), \end{aligned} \right\}$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – корни характеристического уравнения (различные), а  $a_k^{(j)}$  – числа, которые надо найти. Из изложенной теории следует, что такие числа существуют.

Чтобы найти числа  $a_k^{(j)}$ , подставляем функции  $y_j(t)$  в систему (1) и сравниваем коэффициенты при одинаковых  $\exp(\lambda_j t)$ . Числа  $a_k^{(j)}$  получаются при этом неоднозначно, они зависят от  $n$  произвольных постоянных.

**Пример 1.** Решить систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= y + 2x. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 1)^2 - 4 = 0,$$

имеет корни  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Исходя из структуры общего решения, будем искать решения в виде

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t}$$

(т. е. мы опускаем процесс нахождения числа  $a_k^{(j)}$ ).

Коэффициенты  $a_1, a_2$  выразим через  $C_1, C_2$ . Подставляя функции  $x(t)$  и  $y(t)$  в одно из уравнений системы, получаем

$$3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2a_1 e^{3t} + 2a_2 e^{-t},$$

откуда  $2C_1 - 2a_1 = 0$ ,  $-2C_2 - 2a_2 = 0$ , т. е.

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = -C_2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ y(t) &= C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Пусть теперь характеристическое уравнение (5) системы (1) имеет корень  $\lambda_1$  кратности  $r$ . Сведем систему (1) к одному уравнению  $n$ -го порядка относительно функции  $y_1(t)$ . Это уравнение и система (1) имеют одно и то же характеристическое уравнение (доказательство ниже). Но тогда, как мы знаем, корню  $\lambda_1$  кратности  $r$  соответствует решение уравнения  $n$ -го порядка вида

$$y_1(t) = (b_0 + b_1 t + \dots + b_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda_1 t},$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_{r-1}$  — произвольные постоянные. Таким образом,

$$y_1(t) = P_{r-1,1}(t) e^{\lambda_1 t},$$

где  $P_{r-1,1}(t)$  есть многочлен степени  $r - 1$ .

Рассуждая аналогично, мы и другие функции  $y_j(t)$  можем выразить в форме

$$y_j(t) = P_{r-1,j}(t) e^{\lambda_1 t} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (12)$$

где  $P_{r-1,j}(t)$  многочлены степени  $r - 1$ .

Каждая из функций  $y_j(t)$  удовлетворяет указанному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка, каковы бы ни были коэффициенты многочлена  $P_{r-1,j}(t)$ .

Остаются среди многочленов  $P_{r-1,1}, \dots, P_{r-1,n}$  отобрать такие, чтобы соответствующие им функции  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  совместно удовлетворяли системе (1). Для этого надо под-

ставить  $y_j$  в систему (1), сократить на  $e^{\lambda_1 t}$  и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ . Искомые коэффициенты будут зависеть от  $r$  произвольных постоянных. Можно иногда порекомендовать взять многочлен  $P_{r-1,1}(t)$  произвольным, и тогда коэффициенты остальных многочленов  $P_{r-1,j}(t)$  ( $j = 2, \dots, n$ ) уже определятся однозначно через коэффициенты  $P_{r-1,1}$ .

Однако возможно, что на этом пути мы придем к противоречию, показывающему, что на самом деле в данном случае некоторые коэффициенты многочлена  $P_{r-1,1}$  равны нулю и их считать произвольными нельзя.

Подобным образом рассуждаем и в отношении других кратных корней характеристического уравнения, если таковые у данного уравнения имеются. Решения, соответствующие простым корням, ищем в виде (8), как объяснялось выше.

Чтобы получить общее решение системы (1), надо взять сумму указанных решений (вектор-функций).

В простых случаях можно искать решение сразу в виде суммы подобных решений. Это лучше всего выяснить на примерах.

**Пример 2.** Решить систему

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + 3y_2.$$

Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$  или

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  имеет кратный корень  $\lambda_1 = 2$ .

Дифференциальное уравнение, соответствующее нашей системе для функции  $y_1$ , имеет вид  $\ddot{y}_1 - 4\dot{y}_1 + 4y_1 = 0$ . Оно имеет то же характеристическое уравнение.

Решение системы надо искать в виде

$$y_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \quad y_2(t) = (a_1 + a_2 t)e^{2t}.$$

Подставляя эти функции в систему, получаем

$$C_2 + 2C_1 + 2C_2 t = C_1 + C_2 t - a_1 - a_2 t,$$

$$a_2 + 2a_1 + 2a_2 t = C_1 + C_2 t + 3(a_1 + a_2 t).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  (в первом равенстве), получаем  $a_1 = -C_1 - C_2$ ,  $a_2 = -C_2$ . Второе равенство дает те же самые решения. Итак, общее решение системы имеет вид

$$y_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \quad y_2(t) = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t}.$$

**Пример 3.** Решить систему

$$\dot{y}_1 = 2y_1 + y_2 + y_3,$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + 2y_2 + y_3,$$

$$\dot{y}_3 = y_1 + y_2 + 2y_3.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или



$$(1 - \lambda)^2(\lambda - 4) = 0.$$

Таким образом,  $\lambda_1 = 1$  – корень второй кратности, а  $\lambda_3 = 4$  – простой корень характеристического уравнения. Система (3) при  $\lambda_1 = 1$  имеет вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Поэтому  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  должны быть такими, чтобы  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ , т. е. у нас две свободные переменные, скажем  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ .

Поэтому, например,  $\alpha^{(1)} = (-1, 1, 0)$ ,  $\alpha^{(2)} = (-1, 0, 1)$  – линейно независимые собственные векторы матрицы  $A$  нашей системы (матрица  $A$  симметрическая). Для  $\lambda_3 = 4$  находим  $\alpha^{(3)} = (1, 1, 1)$ . Поэтому

$$y^1 = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

– линейно независимые решения и

$$y = C_1 y^1 + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

– общее решение нашей системы.

В развернутом виде общее решение можно записать:

$$y_1(t) = -(C_1 + C_2)e^t + C_3 e^{4t},$$

$$y_2(t) = C_1 e^t + C_3 e^{4t},$$

$$y_3(t) = C_2 e^t + C_3 e^{4t}.$$

**Замечание 3.** Если матрица  $A$  симметрическая ( $a_{kl} = a_{lk}$ ), то соответствующий линейный оператор  $A$  будет самосопряженным и, как мы знаем, в этом случае, какие бы корни уравнение (5) ни имело (в том числе и кратные), существует система из  $n$  собственных линейно независимых векторов  $\alpha$  и, следовательно, для системы (1) с симметрической матрицей  $A$  можно написать общее решение, зная векторы  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 15, 22, 25.

### § 1.22. Сведение системы уравнений к одному уравнению

**Лемма.** Пусть задана линейная система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n - f_1(t), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n - f_n(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $f_j(t)$  – заданные на  $(a, b)$  функции, имеющие нужное число производных.

Если функции  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  удовлетворяют этой системе, то функция  $y_j(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка:

$$D\left(\frac{d}{dt}\right)y_j(t) = \Phi_j(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (2)$$

– характеристический многочлен системы (1), а функции  $\Phi_j(t)$  определяются через  $a_{kl}$  и  $f_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) (см. ниже (4)).

**Доказательство.** Систему (1) запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(a_{11} - \frac{d}{dt}\right)y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &= f_1(t), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + \left(a_{nn} - \frac{d}{dt}\right)y_n &= f_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Элемент определителя (2), расположенный в  $k$ -й строке и  $l$ -м столбце, обозначим через  $b_{kl}(\lambda)$ , а соответствующее алгебраическое дополнение через  $M_{kl}(\lambda)$  (например,  $b_{11}(\lambda) = a_{11} - \lambda$ ,

$b_{12}(\lambda) = a_{12}$ ). Если заменить в этих выражениях  $\lambda$  на  $\frac{d}{dt}$ , то

получим дифференциальные операторы  $b_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$ ,  $M_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$ . К

ним можно применять рассуждения как при выводе теоремы Кронекера<sup>1</sup>.

Имеем

$$\sum_{s=1}^n b_{si}(\lambda)M_{sj}(\lambda) = \delta_{ij} \cdot D(\lambda), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(т. е. сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя  $D(\lambda)$  на адъюнкты элементов этого же столбца (другого столбца) равна определителю  $D(\lambda)$  (равна нулю)). Поэтому

$$\sum_{s=1}^n b_{si}\left(\frac{d}{dt}\right)M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) = \delta_{ij} \cdot D\left(\frac{d}{dt}\right). \quad (3)$$

Применим теперь к первому уравнению (1') (точнее к левой и правой его частям) оператор  $M_{1j}\left(\frac{d}{dt}\right)$  (т. е. произведем ряд дифференцирований, умножений на число и сложений), ко второму — оператор  $M_{2j}\left(\frac{d}{dt}\right)$  и так далее и сложим их. Тогда на основании (3) получим

$$\sum_{s=1}^n M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right)b_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right)y_j = D\left(\frac{d}{dt}\right)y_j = \sum_{s=1}^n M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right)f_s(t),$$

т. е.

$$D\left(\frac{d}{dt}\right)y_j = \Phi_j(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где

$$\Phi_j(t) = \sum_{s=1}^n M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right)f_s(t). \quad (4)$$

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 4.

**З а м е ч а н и е.** Если все  $f_s(t) \equiv 0$  ( $s = 1, \dots, n$ ), то  $\Phi_j(t) \equiv 0$  и дифференциальное уравнение будет одно и то же для всех функций  $y_j(t)$ :

$$D\left(\frac{d}{dt}\right)y_j = 0.$$

**П р и м е р.** Свести к одному уравнению систему

$$\dot{y}_1 = y_1 + y_2,$$

$$\dot{y}_2 = y_2.$$

Запишем эту систему в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{d}{dt}\right)y_1 + y_2 &= 0, \\ 0 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right)y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь  $b_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$ ,  $b_{12} = 1$ ,  $b_{21} = 0$ ,  $b_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$ ;  $M_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$ ,  $M_{12} = 0$ ,  $M_{21} = -1$ ,  $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$ . Применяя к первому уравнению (5) оператор  $M_{11}$ , ко второму — оператор  $M_{21}$  и складывая, получаем

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right)y_2 - \left(1 - \frac{d}{dt}\right)y_2 = 0,$$

т. е.

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 + y_1 = 0,$$

Совершенно аналогично применяя к первому уравнению (5)

оператор  $M_{12} = 0$ , ко второму — оператор  $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$  и складывая, получаем

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_2 = 0.$$

Это дифференциальное уравнение мы можем получить и другим способом. Например, дифференцируя второе уравнение, имеем

$$\ddot{y}_2 = \dot{y}_2.$$

Вычитая из этого уравнения второе уравнение системы, получим

$$\ddot{y}_2 - 2\dot{y}_2 + y_2 = 0.$$

### § 1.23. Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad (1')$$

где  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  — заданная непрерывная на  $(a, b)$  вектор-функция,  $a_{ki}$  — заданные постоянные числа и  $A = \|a_{ki}\|$ , называется *неоднородной системой дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение системы (1) равно сумме

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k y^k(t) + y^0(t) \quad (2)$$

какого-либо ее частного решения  $y^0(t)$  и общего решения

$\sum_{k=1}^n C_k y^k(t)$  соответствующей однородной системы

$$L[y] \equiv \frac{dy}{dt} - Ay = 0. \quad (3)$$

В самом деле, сумма (2) при любых постоянных  $C_k$  есть, очевидно, решение системы (1):

$$L\left[\sum_{k=1}^n C_k y^k + y^0\right] = L[y^0] = f.$$

А с другой стороны, если  $y$  есть решение системы (1), то

$$L[y - y^0] = L[y] - L[y^0] = f - f = 0,$$

но тогда для некоторых постоянных  $C_k$

$$y - y^0 = \sum_{k=1}^n C_k y^k.$$

Если известно общее решение однородной системы (3), то частное решение неоднородной системы (1) можно находить методом *вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа<sup>1</sup>).

Пусть

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k y^k(t)$$

– общее решение системы (3), т. е.  $y^k(t)$  – линейно независимые частные решения (3):

$$L[y^k] = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Будем считать  $C_k = C_k(t)$  функциями от  $t$  и подберем их так, чтобы функция

$$U(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) y^k(t) \tag{4}$$

была частным решением неоднородной системы (1). Дифференцируя, имеем

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[ C_k(t) \frac{dy^k}{dt} + C'_k(t) y^k(t) \right].$$

Подставляя значения  $U$  и  $\frac{dU}{dt}$  в (1'), получаем

---

<sup>1</sup> Ж. Л. Лагранж (1736–1813) – выдающийся французский физик и математик.

$$\sum_{k=1}^n \left[ C_k(t) \frac{dy^k}{dt} + C'_k(t) y^k(t) \right] - \sum_{k=1}^n C_k(t) A y^k = f(t),$$

или

$$\sum_{k=1}^n C_k(t) L[y^k] + \sum_{k=1}^n C'_k(t) y^k(t) = f(t).$$

Так, как  $L[y^k] = 0$ , то для определения  $C'_k(t)$  мы получаем систему

$$\sum_{k=1}^n C'_k(t) y^k(t) = f(t) \quad (5)$$

с непрерывными на  $(a, b)$  вектор-функциями  $f(t)$  и  $y^k(t)$ .

Система (5) является линейной относительно  $C'_k(t)$  с определителем, равным определителю Вронского системы векторов  $y^1, \dots, y^{(n)}$ . Так как этот определитель не равен нулю, то система (5) имеет единственное решение:  $C'_k(t) = \varphi_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Функции  $\varphi_k(t)$  непрерывны, потому что непрерывны вектор-функции  $f(t)$  и  $y^k(t)$ .

Интегрируя, находим

$$C_k(t) = \int \varphi_k(t) dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

Подставляя эти значения в (4), получаем частное решение системы (1).

**Пример 1.** Решить систему

$$\dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 + e^t,$$

$$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2.$$

Легко проверить, что

$$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$$

является общим решением однородной системы. Найдем частное решение неоднородной системы методом Лагранжа. Будем считать  $C_1 = C_1(t)$ ,  $C_2 = C_2(t)$  функциями от  $t$ . Тогда

$$\dot{y}_1 = 3C_1(t)e^{3t} - C_2(t)e^{-t} + C'_1(t)e^{3t} + C'_2(t)e^{-t},$$

$$\dot{y}_2 = 3C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-t} + C'_1(t)e^{3t} - C'_2(t)e^{-t}.$$

Подставляя эти значения производных и сами функции в нашу систему, получаем

$$C'_1(t)e^{3t} + C'_2(t)e^{-t} = e^t,$$

$$C'_1(t)e^{3t} - C'_2(t)e^{-t} = 0.$$

Определитель данной системы есть определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t} \neq 0.$$

Поэтому система разрешима:

$$C'_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}, \quad C'_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}, \quad C_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = -\frac{1}{2}e^t.$$

Общее решение можно записать в форме

$$y_1(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \quad y_2(t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^t.$$

В векторной (матричной) форме это выглядит так:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Ниже на примерах будет показано, как можно найти частное решение системы (1), когда  $f_i(t) = b_i \exp(\lambda_i t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $b_i, \lambda_i$  — заданные постоянные числа.

Частное решение линейной неоднородной системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда правые части  $f_i(t)$  имеют специальный вид ( $\exp(kt)$  или  $t^m \exp(kt)$ ), можно находить по аналогии с решением неоднородного дифференциального уравнения.



Пример 2. Решить систему

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y + e^{3t}.$$

Сначала решаем однородную систему. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Значит, общее решение однородной системы запишется в виде

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Свободным членам системы  $f_1(t) = e^t$ ,  $f_2(t) = e^{3t}$  соответствуют числа 1 и 3. Число 1 не есть корень характеристического уравнения, а 3 есть его корень первой кратности. По аналогии, как для одного уравнения, полагаем

$$\bar{x} = b_1 e^t + (b_2 + b_3 t) e^{3t},$$

$$\bar{y} = a_1 e^t + (a_2 + a_3 t) e^{3t}.$$

Подставляя эти функции в нашу систему, находим

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1/2;$$

$$a_1 = -1/2, \quad a_2 = 1/4, \quad a_3 = 1/2.$$

Общее решение неоднородной системы запишется:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} e^{3t},$$

$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \left( \frac{1}{4} + \frac{t}{2} \right) e^{3t}.$$

## § 1.24. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов

В этом параграфе рассматривается два примера решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью степенных рядов. Коэффициентами их являются некоторые многочлены.

Второй пример посвящен важному в математике и ее приложениях дифференциальному уравнению Бесселя. Решения уравнения Бесселя, составляющие его фундаментальную систему функций, не являются элементарными функциями. Но они, как мы увидим, разлагаются в степенные ряды, коэффициенты которых вычисляются довольно просто.

Пример 1.  $y'' - xy = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

В данном случае  $p_0(x) = -x$ , т. е. является многочленом первой степени относительно  $x$ . Будем искать решение в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (1)$$

В силу начального условия  $y(0) = 0$  получаем, что  $a_0 = 0$ . Из условия  $y'(0) = 1$ , получаем  $a_1 = 1$ . Дифференцируя формально данный ряд почленно два раза и подставляя в уравнение, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (2)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях (2), получим:

$$a_2 = 0; \quad 3 \cdot 2a_3 = a_0, \quad \text{откуда } a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3} = 0;$$

$$4 \cdot 3a_4 = a_1, \quad \text{откуда } a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4};$$

$$5 \cdot 4a_5 = a_2, \quad \text{откуда } a_5 = 0;$$

$$6 \cdot 5a_6 = a_3, \quad \text{откуда } a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = 0;$$

.....

$$n(n-1)a_n = a_{n-3}, \quad \text{откуда } a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)};$$

.....

Так как у нас  $a_0 = a_2 = 0$ , то все коэффициенты

$$a_{3k} = 0, \quad a_{3k+2} = 0.$$

Далее

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3(k-1)+1}}{(3k+1)3k} = \dots = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k(3k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Итак,

$$y(x) = x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k(3k+1)} + \dots \quad (3)$$

По признаку Даламбера радиус сходимости этого ряда равен бесконечности. Следовательно, все наши операции были законными и сумма ряда при всех значениях  $x$  является решением уравнения.

**Пример 2. Уравнение Бесселя<sup>1</sup>:**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (4)$$

К этому уравнению сводятся многие задачи математической физики.

Будем искать частное решение (4) в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) два раза почленно и подставляя в (4), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \rho)^2 x^{k+\rho} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} [(k + \rho)^2 + x^2 - \nu^2] = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем

<sup>1</sup> Ф. В. Бессель (1784–1846) – немецкий астроном.

$$\left. \begin{array}{l}
 x^\rho \quad \left| \begin{array}{l} a_0(\rho^2 - v^2) \\ a_1[(\rho + 1)^2 - v^2] \\ a_2[(\rho + 2)^2 - v^2] + a_0 \\ a_3[(\rho + 3)^2 - v^2] + a_1 \\ \dots \\ a_p[(\rho + p)^2 - v^2] + a_{p-2} \\ \dots \end{array} \right. \\
 \end{array} \right\} = 0, \quad (6)$$

Коэффициент  $a_0$  при низшей степени  $x$  будем считать отличным от нуля, тогда первое уравнение в (6) дает

$$\rho = \pm v.$$

Пусть пока  $\rho = v \geq 0$ . Тогда из второго уравнения (6) получаем  $a_1[(v + 1)^2 - v^2] = 0$ , т. е.  $a_1 = 0$ , а следовательно, и все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю ( $a_{2p+1} = 0$ ). Далее

$$\left. \begin{array}{l}
 a_2 = -\frac{a_0}{(v+2)^2 - v^2} = -\frac{a_0}{2^2(v+1)}, \\
 a_4 = -\frac{a_2}{(v+4)^2 - v^2} = \frac{a_0}{2^4(v+1)(v+2) \cdot 1 \cdot 2}, \\
 \dots \\
 a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!(v+1)(v+2)\dots(v+p)}, \\
 \dots
 \end{array} \right\} \quad (7)$$

При  $\rho = -v$  ( $v$  — не целое) таким же образом получаем

$$a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!(-v+1)(-v+2)\dots(-v+p)}.$$

Таким образом, при  $\rho = v$  решение уравнения (4) запишется так:

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+v}}{2^{2p} p!(v+1)\dots(v+p)}. \quad (8)$$

Введем функцию (см. ниже § 2.15, пример 3)

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (p > 0),$$

называемую *гамма-функцией Эйлера*. Легко проверить, что  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  и что для целых  $p > 0$ ,  $\Gamma(p+1) = p!$ .

Для отрицательных  $p$ ,  $\Gamma(p)$  определяется по-другому, но свойство  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  сохраняется. Если выбрать произвольное постоянное  $a_0 = 1/(2^v \Gamma(v+1))$ , то (8) запишется

$$J_\nu(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)}. \quad (9)$$

При  $p = -\nu$  ( $\nu$  — не целое), выбирая постоянное  $a_0 = 1/(2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1))$ , аналогично получим

$$J_{-\nu}(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p-\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p-\nu+1)}. \quad (10)$$

Функции  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  называются функциями *Бесселя первого рода порядка  $\nu$  и  $-\nu$  соответственно*.

Ряд (9) сходится для всех  $x$ , а ряд (10)  $\forall x \neq 0$  и оба они допускают двукратное почленное дифференцирование, следовательно,  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  — решения уравнения Бесселя (4).

Если  $\nu$  — не целое число, то функции  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  линейно независимы, так как их ряды начинаются с различных степеней  $x$  и линейная комбинация

$$\alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 J_{-\nu}(x) \equiv 0$$

только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Поэтому общее решение (4) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Интересно отметить, что при  $\nu = n + \frac{1}{2}$  ( $n$  — целое)

функция  $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$  выражается через элементарные функ-

ции. Например, при  $\nu = \frac{1}{2}$  имеем

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{p! \Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) 2^{2p+\frac{1}{2}}}.$$

Но

$$\begin{aligned} \Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) &= \left(p + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(p + \frac{1}{2}\right) \left(p - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) = \dots = \\ &= \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 3 \cdot 1}{2^{p+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} d\sqrt{x} = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

(см. пример 3 § 2.13).

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{p! 1 \cdot 3 \dots (2p-1)(2p+1) \sqrt{\pi} 2^{p-\frac{1}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1} 2 \cdot 4 \dots 2p}{p! (2p+1)! 2^p} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned}$$

Если  $\nu = n$  — целое число, то можно показать, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т. е. эти функции оказываются линейно зависимыми  $\Gamma(p)$  при отрицательных целых  $p$  и  $p = 0$  обращается в беско-

нечность). Поэтому за второе линейно независимое решение надо брать какую-то другую функцию. Обычно берут функцию Бесселя второго рода  $Y_n(x)$ . Эта функция является некоторой комбинацией функций  $J_m(x)$  и  $J_{-m}(x)$ :

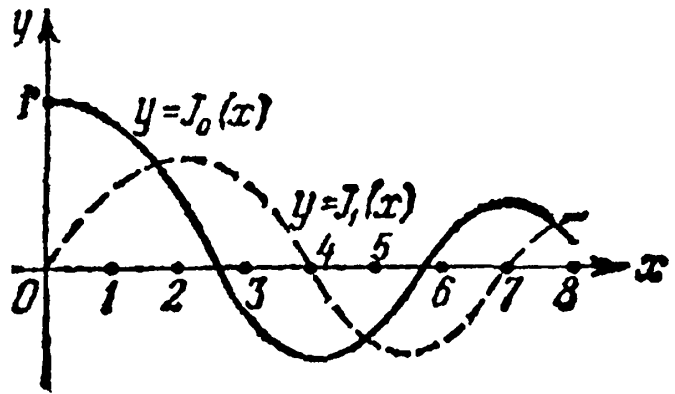


Рис. 17

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

( $\nu$  — не целое и стремится к  $n$ ).

**З а м е ч а н и е 1.** Таким образом, общее решение уравнения (4) при  $\nu = n$  натуральном имеет вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Заметим, что функция  $Y_n(x)$  не ограничена в окрестности  $x = 0$ . Например,

$$nY_n(x) = 2J_0(x) \left[ \ln \frac{x}{2} + C \right] - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m},$$

где  $C$  — постоянная Эйлера ( $C \approx 0,577$ ).

Поэтому любое решение уравнения (4), ограниченное в окрестности  $x = 0$ , имеет вид  $y = C_1 J_\nu(x)$ , т. е. для него  $C_2 = 0$ .

Приведем графики функций Бесселя (рис. 17)  $J_0(x)$  (четной) и  $J_1(x)$  (нечетной).

## § 1.25. Элементы теории устойчивости

Во многих задачах важно знать не *одно конкретное* решение задачи, отвечающей данным начальным условиям, а характер поведения решения при изменении начальных условий и при изменении аргумента. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, одним из основных разделов которой является *теория устойчивости решения*, или теория устойчивости движения.

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Условия (2) обычно являются результатом измерения и, следовательно, получены с некоторой точностью.

Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение системы (1), определяемое выбранными нами *не точными* начальными данными, не имеет никакого значения и даже приближенно не может описывать явление.

Поэтому важно знать условия, при которых малое изменение условий (2) влечет малое изменение решения системы (1).

Если  $t$  меняется в достаточно малом конечном промежутке  $|t_0 - t| \leq T$ , то ответ на этот вопрос можно получить на основании теоремы существования и единственности.

**Теорема 1** (о непрерывной зависимости решения от начальных условий). *Если правая часть дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3)$$

*непрерывна и по переменному  $y$  имеет ограниченную частную производную ( $|f'_y| \leq N$ ) на прямоугольнике  $D = \{t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ , то решение уравнения (3)  $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(t_0) = y_0$ , непрерывно зависит от начальных данных. Точнее, для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что если  $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$ , то*

$$|y(t, t_0, y_0) - y(t, t_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

при

$$|t_0 - t| < T, \quad T < T_0, \quad T_0 = \min \left\{ a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M} \right\},$$



$$M = \max_{(t,y) \in D} |f(t, y)|.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы существования (§ 1.6) мы получили, что

$$y(t) = y(t, t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt,$$

$$\bar{y}(t) = y(t, t_0, \bar{y}_0) = \bar{y}_0 + \int_{t_0}^t f(t, \bar{y}(t)) dt.$$

Отсюда, применяя теорему Лагранжа (пояснения ниже), получим

$$\begin{aligned} |y(t) - \bar{y}(t)| &\leq |y_0 - \bar{y}_0| + \int_{t_0}^t |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| dt \leq \\ &\leq |y_0 - \bar{y}_0| + N|t - t_0| \max_t |y(t) - \bar{y}(t)| \leq \\ &\leq |y_0 - \bar{y}_0| + NT \max_t |y(t) - \bar{y}(t)|. \end{aligned}$$

Так как  $TN < 1$ , то

$$(1 - TN)|y(t) - \bar{y}(t)| \leq |y_0 - \bar{y}_0|,$$

или

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leq |y_0 - \bar{y}_0| / (1 - TN).$$

Если теперь мы возьмем

$$|y_0 - \bar{y}_0| < \delta, \text{ где } \delta = \varepsilon(1 - TN),$$

то

$$|y(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon.$$

Сделаем некоторые пояснения. Имеет место неравенство

$$|y(t, t_0, y_0) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt \right| \leq |t - t_0| M \leq TM,$$

где  $TM \leq T_0M < b$  или  $b - TM = \delta_0 > 0$ , показывающее, что интегральная кривая  $y(t, t_0, y_0)$  для  $|t - t_0| < T$  принадлежит к прямоугольнику, находящемуся строго внутри прямоугольника  $D$ . Отсюда видно, что кривая

$$y(t, t_0, \bar{y}_0), |t - t_0| < T,$$

тоже не выходит за пределы прямоугольника  $D$ , если только

$$|\bar{y}_0 - y_0| < \delta_0.$$

Это показывает, что теорема Лагранжа была применена выше обоснованно, во всяком случае при  $\delta < \delta_0$ , — ведь функция  $f(t, y)$  по условию имеет непрерывную производ-

ную  $\frac{\partial f}{\partial y}$  на  $D$ .

Подобная теорема верна и для системы (1).

При выполнении всех условий теоремы говорят, что *задача поставлена корректно*.

Мы изучали устойчивость решения на достаточно малом отрезке значений  $t$ .

Если же аргумент  $t \in [t_0, \infty)$  может принимать какие угодно значения, то вопросом зависимости решения от начальных данных занимается теория устойчивости.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  — решение системы (1). Решение  $\varphi(t)$  системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*<sup>1</sup>, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого решения  $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4)$$

справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n, \forall t \in [t_0, \infty)). \quad (5)$$

Таким образом, решение  $\varphi(t)$  устойчиво по Ляпунову, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и для всех  $t \geq t_0$  (рис. 18).

<sup>1</sup> А. М. Ляпунов (1857–1918) — выдающийся русский математик и механик.

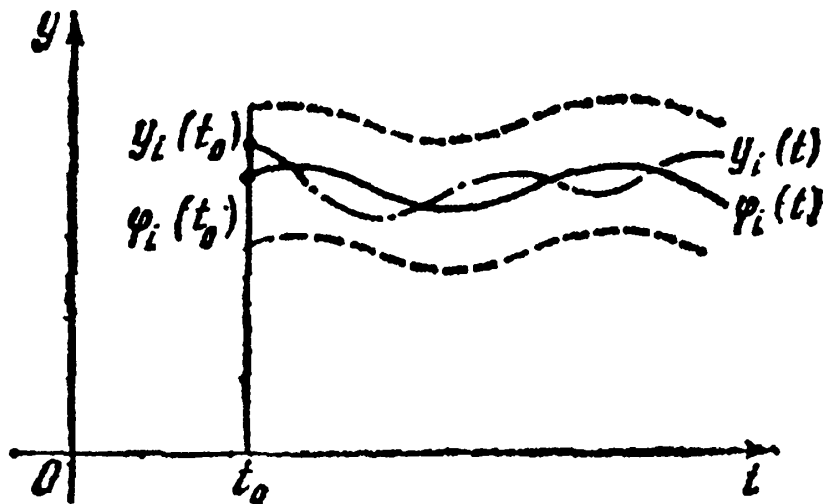


Рис. 18

Если решение  $\varphi(t)$  устойчиво по Ляпунову и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6)$$

то оно называется *асимптотически устойчивым*.

Отметим, что из (6) не следует устойчивость по Ляпунову.

Пример 1.  $\frac{dy}{dt} = -y, y(x_0) = y_0$ .

Общее решение этого уравнения  $y = C \exp(-x)$ . Решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид

$$y = y_0 \exp(x_0 - x).$$

Если теперь мы зададим другое начальное условие  $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ , то решение будет

$$\bar{y} = \bar{y}_0 \exp(x_0 - x).$$

Отсюда

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) \leq |y_0 - \bar{y}_0|,$$

при  $x \geq x_0$ . Поэтому, если  $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta = \varepsilon$ , то  $|y - \bar{y}| \leq \varepsilon$ , т. е. решение  $y = y_0 \exp(x_0 - x)$  устойчиво по Ляпунову при  $x \geq x_0$ . Это решение также и асимптотически устойчиво, так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y - \bar{y}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) = 0.$$

**Пример 2.** Для уравнения  $y' = y$  аналогично можно показать, что

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x - x_0),$$

для  $x \geq x_0$  при любом  $x_0$ .

Очевидно, каково бы ни было  $x_0$  при  $x \geq x_0$ , решение  $y$  неустойчиво, так как сомножитель  $\exp(x - x_0) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Исследование на устойчивость по Ляпунову произвольного решения  $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  системы (1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального (тождественно равного нулю) решения некоторой другой системы. Для этого надо перейти к новым неизвестным функциям

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Отсюда

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Поэтому система (1) перейдет в систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), \dots, x_n + \varphi_n(t)] - f_i[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \quad (8)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Система (8) имеет тривиальное решение

$$x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Из сказанного следует теорема.

**Теорема 2.** Решение  $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  системы (1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тривиальное решение (точка покоя) системы (8).

Это решение обладает тем свойством, что точка  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  в действительности не движется при изменении  $t$ , а стоит на месте. Само решение (9) и точка  $(0, \dots, 0)$  в этом случае называется *положением равновесия системы (1) или точкой покоя*.

Условия устойчивости применительно к точке покоя  $x_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) можно сформулировать так: точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) системы (8) устойчива по Ляпунову, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, \dots, n)$$

следует

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n, \forall t \geq t_0),$$

т. е. траектория, начальная точка которой находится в некоторой  $\delta$ -окрестности начала координат, при  $t \geq t_0$  не выходит за пределы произвольной  $\varepsilon$ -окрестности начала координат. Здесь мы говорим об окрестностях прямоугольных, но можно перейти и к сферическим окрестностям, что удобно особенно при векторной форме записи решения  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ :

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (t \geq t_0).$$

**З а м е ч а н и е 1.** Произвольное частное решение  $\mathbf{y}_0(t)$  линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (10)$$

(см. (1') § 1.23) устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) точка покоя соответствующей однородной системы (см. теорему 2)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}. \quad (11)$$

В самом деле, система (10) является частным случаем системы (1), а система (11) есть частный случай системы (8). Здесь свободные члены исчезли, так как функция  $\mathbf{f}(t)$  зависит только от  $t$  и не зависит от искомых функций.

**Т е о р е м а 3 (Л я п у н о в а).** Пусть дана система

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

имеющая тривиальное решение  $y_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Пусть существует дифференцируемая функция  $v$  ( $y_1, \dots, y_n$ ), удовлетворяющая условиям:

1)  $v(y_1, \dots, y_n) \geq 0$  и  $v = 0$  только при  $y_1 = \dots = y_n = 0$ , т. е. функция  $v$  имеет строгий минимум в начале координат.

2) Полная производная функции  $v$  вдоль фазовой траектории (т. е. вдоль решения  $y_i(t)$  системы (1))

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(t, y_1, \dots, y_n) \leq 0 \text{ при } t \geq t_0.$$

Тогда точка покоя  $y_i \equiv 0$  ( $i=1, \dots, n$ ) устойчива по Ляпунову.

Если дополнительно потребовать, чтобы вне сколь угодно малой окрестности начала координат ( $y_1^2 + \dots + y_n^2 \geq \delta$ )

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0 \quad (t \geq t_0),$$

где  $\beta$  — постоянная величина, то точка покоя  $y_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) асимптотически устойчива.

Функция  $v$  называется функцией Ляпунова.

Пример 3.

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1^5 - y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3.$$

Легко видеть, что точка покоя  $y_1 = y_2 \equiv 0$  является решением данной системы. Выясним, будет ли она устойчива.

Рассмотрим функцию  $v(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ . Она удовлетворяет всем условиям теоремы:

1)  $v(y_1, y_2) \geq 0$  и  $v = 0$  только при  $y_1 = y_2 = 0$ .

2) Вдоль фазовой траектории

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} = 2y_1(-y_1^5 - y_2) + 2(y_1 + y_2^3) = \\ &= -2(y_1^6 + y_2^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Кроме того, вне окрестности начала координат ( $y_1^2 + y_2^2 \geq \delta > 0$ )

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$$

(где  $\beta$  — минимум функции  $2(y_1^2 + y_2^2)$  вне круга ( $y_1^2 + y_2^2 = \delta$ )).

Значит, решение  $y_1 = y_2 \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

**Замечание 2.** Функцию Ляпунова рекомендуется искать в виде квадратичной формы от аргументов  $y_1, \dots, y_n$ , т. е.

$$v = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j.$$

Первое требование говорит о том, что  $v$  должна быть положительно определенной квадратичной формой. Каким образом подбирать коэффициенты  $a_{ij}$ , чтобы форма  $v$  была положительно определенной, указывается в теореме Сильвестра<sup>1</sup>

$$\left( a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \right).$$

## § 1.26. Классификация точек покоя

Исследование на устойчивость системы двух линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно провести на основании теоремы Ляпунова. Однако систему (1) можно исследовать на устойчивость и непосредственно, так как мы можем ее решить.

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 22, Дж. Д. Сильвестр (1814–1897) — английский математик.

Будем предполагать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Легко видеть, что  $y(t) = x(t) \equiv 0$  является решением системы (1) с нулевыми начальными условиями.

Для нахождения общего решения мы должны найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0. \quad (3)$$

Из условия  $\Delta \neq 0$  следует, что  $\lambda = 0$  не является корнем характеристического уравнения (3).

1. Пусть корни характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и различны. Далее, пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  – собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие корням  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_1)\alpha_2 = 0, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_2)\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda_2)\beta_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Тогда, как мы знаем, общее решение системы (1) имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , то из (5) видно, что точка покоя  $x = y \equiv 0$  асимптотически устойчива.

В самом деле, будем считать, например, что  $t_0 = 0$ , тогда решение (5), проходящее через точку  $(x_0, y_0)$  в момент времени  $t_0$ , определяется постоянными  $C_1$  и  $C_2$ , которые вычисляются из уравнений

$$x_0 = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1,$$

$$y_0 = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2,$$

где  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ . Но тогда

$$C_1 = Ax_0 + By_0, \quad C_2 = Dx_0 + Ey_0,$$



где  $A, B, C, D, E$  – некоторые константы. Следовательно,

$$|x(t)| \leq |Ax_0 + By_0| |\alpha_1| + |Dx_0 + Ey_0| |\beta_1|,$$

$$|y(t)| \leq |Ax_0 + By_0| |\alpha_2| + |Dx_0 + Ey_0| |\beta_2|,$$

потому что  $|e^{\lambda_1 t}| \leq 1$ ,  $|e^{\lambda_2 t}| \leq 1$  при  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что как только  $|x_0|, |y_0| < \delta$ , выполняются неравенства

$$|x(t)|, |y(t)| < \varepsilon \quad (t > 0),$$

т. е. точка  $(0, 0)$  устойчива по Ляпунову. Кроме того, в силу того, что

$$\exp(\lambda_i t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

из (5), очевидно, следует, что точка  $(0, 0)$  асимптотически устойчива.

Если мы исключим аргумент  $t$  из системы (5), то полученная функция  $y = \varphi(x)$  дает траекторию движения в системе  $xOy$ .

Математическая точка, находящаяся в начальный момент времени  $t = t_0$  в  $\delta$ -окрестности начала координат, при достаточно большом  $t$  переходит в точку, лежащую в  $\varepsilon$ -окрестности начала координат и при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к началу координат.

Такая точка покоя называется *устойчивым узлом* (рис. 19).

На рис. 19 изображено расположение траекторий, соответствующих данному случаю. Стрелками мы указываем направление движения точки по траектории при  $t \rightarrow +\infty$ . Все траектории, кроме одной, в точке  $(0, 0)$  имеют общую касательную. Если считать, что  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , то угловой коэффициент касательной равен  $\alpha_2/\alpha_1$ .

В самом деле, из (1) и (5) имеем ( $C_1 \neq 0$ )

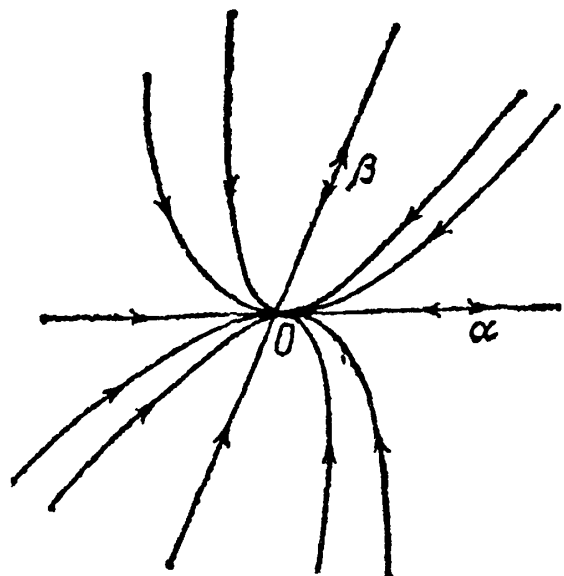


Рис. 19

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})} = \\ &= \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{a_{21}C_1\alpha_1 + a_{22}C_1\alpha_2}{a_{11}C_1\alpha_1 + a_{12}C_1\alpha_2} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2} = \frac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \end{aligned}$$

если  $\alpha_i \neq 0$ , так как в силу (4)

$$\alpha_{21}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_2, \quad \alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1.$$

Если же  $\alpha_1 = 0$ , то, рассуждая так же, получим  $\frac{dx}{dy} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0!).$$

Если  $C_1 = 0$ , то из (5) получаем одну траекторию

$$y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x.$$

Касательная к этой траектории (прямой) имеет угловой коэффициент  $\beta_2/\beta_1$ .

Таким образом, касательная к траекториям, у которых  $C_1 \neq 0$ , параллельна собственному вектору  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , отвечающему наименьшему по абсолютной величине собственному числу  $\lambda_i$  (при  $\alpha_1 = 0$  вектор направлен по оси  $y$ ).

Кроме того, имеется одна траектория (при  $C_1 = 0$ ), а именно, прямая  $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ , которая параллельна второму

собственному вектору  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ , отвечающему большему по модулю собственному числу  $\lambda_2$ .

Если теперь  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 > 0$ , то из (5) видно, что точка покоя  $x = y \equiv 0$  неустойчива, так как  $\exp(\lambda_i t) \rightarrow +\infty$  при

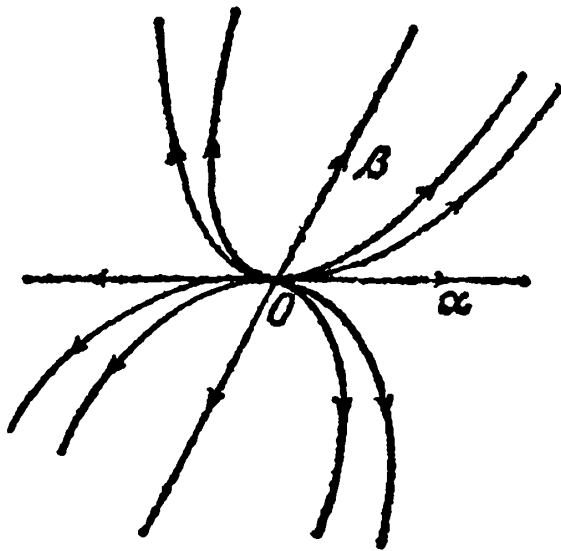


Рис. 20

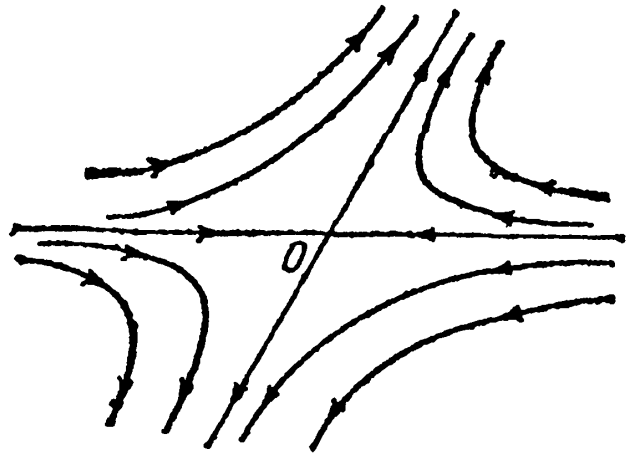


Рис. 21

$t \rightarrow +\infty$ . Такую точку покоя называют *неустойчивым узлом*. Данный случай получается из предыдущего заменой  $t$  на  $(-t)$ . Поэтому траектории будут иметь прежний вид, но движение точки по траектории будет происходить в противоположном направлении (рис. 20).

Наконец, если число  $\lambda_1 < 0$ , а  $\lambda_2 > 0$  (или, наоборот,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ), то точка покоя тоже неустойчива, так как  $\exp(\lambda_2 t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Точки, находящиеся в  $\delta$ -окрестности начала координат, по траектории

$$x = C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}$$

уходят в бесконечность. Отметим, что в данном случае имеется траектория, по которой движение точки происходит в направлении начала координат при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$x = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Это прямая  $\alpha_1 y - \alpha_2 x = 0$ . Точка покоя данного вида называется *седлом* (рис. 21).

2. Пусть корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексные ( $a_{ki}$  действительны!)

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq \quad (q \neq 0).$$

Общее решение системы (1) можно записать в виде (5), где векторы  $\alpha$  и  $\beta = \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$  будут уже с комплексными координатами.

Действительная и мнимая части этого решения также являются решением системы. Поэтому общее решение

системы (1) можно записать в виде линейной комбинации этих решений:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt} (a \cos qt + b \sin qt), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные и  $a, b$  – некоторые линейные комбинации этих постоянных

$$(a = kC_1 + lC_2, b = mC_1 + nC_2).$$

Проиллюстрируем этот факт на конкретном примере.

**Пример 1.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ . Координаты векторов  $\alpha$  и  $\beta$  находим из равенств

$$(1 - i) \alpha_1 - \alpha_2 = 0, (1 + i) \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

т. е. можно положить  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1 - i; \beta_1 = 1, \beta_2 = 1 + i$ .

Тогда

$$x = \alpha_1 e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

$$y = \alpha_2 e^{it} = (1 - i)(\cos t + i \sin t) = (\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t)$$

– решение системы.

Действительная и мнимая части этого решения также являются решениями системы, причем линейно независимыми. Поэтому их линейная комбинация дает общее решение нашей системы:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 (\cos t + \sin t) + C_2 (\sin t - \cos t) = \\ &= (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае

$$a = C_1 - C_2, \quad b = C_1 + C_2.$$

При  $p = 0$  траектории (6) для различных  $C_1, C_2$  в силу периодичности множителей в скобках являются замкнутыми кривыми — эллипсами с центром в точке  $(0, 0)$  (рис. 22). Эти точки называются *центром*. При  $p = 0$  нет асимптотической устойчивости — точка  $(x(t), y(t))$  движется по одному из эллипсов указанного семейства, обходя его бесконечное число раз.

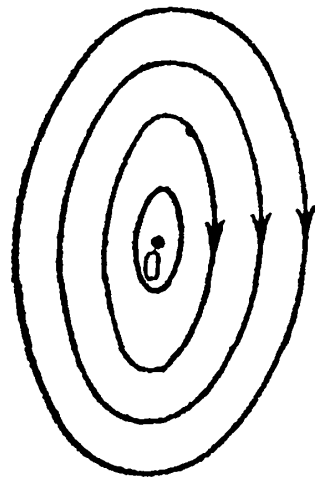


Рис. 22

Она, очевидно, не стремится ни к какому пределу при  $t \rightarrow +\infty$ . С другой стороны, при  $p = 0$  точка покоя  $(0, 0)$  является устойчивой по Ляпунову. Проверим это утверждение на разобранном выше примере 1. Найдем решение рассмотренной в примере 1 системы, проходящее в момент времени  $t_0 = 0$  через точку  $x_0, y_0$ . Очевидно,

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_1 - C_2,$$

следовательно,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = x_0 - y_0$$

и решение имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos t + (x_0 - y_0) \sin t,$$

$$y(t) = y_0 \cos t + (2x_0 - y_0) \sin t.$$

Имеем далее

$$|x(t)| \leq |x_0| + |x_0| + |y_0| = 2|x_0| + |y_0|,$$

$$|y(t)| \leq |y_0| + 2|x_0| + |y_0| = 2|x_0| + 2|y_0|.$$

Зададим  $\varepsilon > 0$ , и пусть  $\delta = \varepsilon / 4$ . Тогда, очевидно, если  $|x|, |y| < \delta$ , то для всех  $t$

$$|x(t)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

$$|y(t)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Мы доказали устойчивость по Ляпунову точки покоя.

Из (6) видно, что при  $p < 0$  точка  $(x, y)$  при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к нулевой точке  $x = 0, y = 0$ , называемой *устой-*

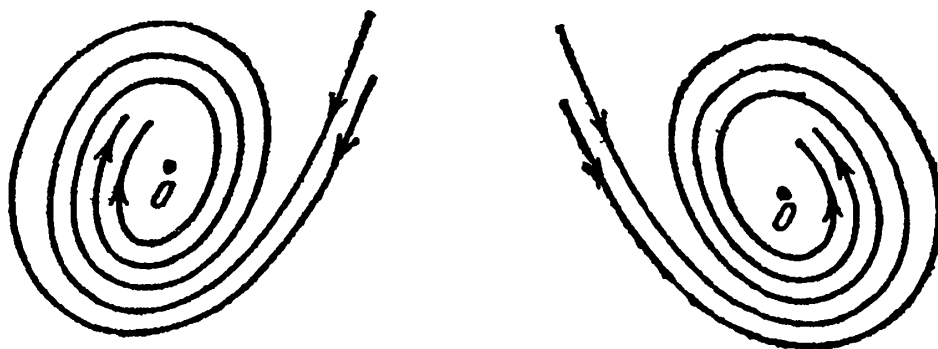


Рис. 23

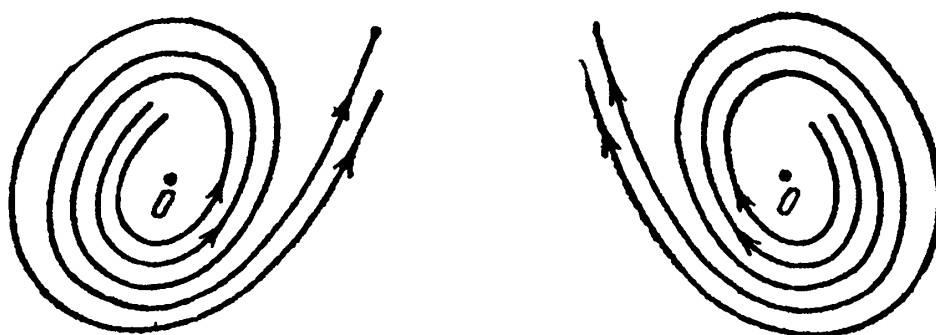


Рис. 24

*чивым фокусом.* Наличие множителя  $\exp(pt) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) превращает замкнутые кривые в спирали, приближающиеся асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  к началу координат (рис. 23).

Точки, находящиеся при  $t = t_0$ , в произвольной  $\delta$ -окрестности начала координат, при достаточно большом  $t$  попадают в заданную  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(0, 0)$ .

Траектории, стремящиеся к фокусу, обладают тем свойством, что касательные к ним при  $t \rightarrow +\infty$  не стремятся ни к какому пределу. Этим фокус отличается от узла.

В случае  $p < 0$  точка  $x = y = 0$  асимптотически устойчива.

Если действительная часть  $p$  корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  положительна, то этот случай переходит в предыдущий при замене  $t$  на  $(-t)$ . Следовательно, траектории сохраняют форму как на рис. 23, только движение точки будет происходить в противоположном направлении. Так как  $\exp(pt) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то точки, находящиеся в начальный момент времени в окрестности начала координат, затем уходят в бесконечность. Такая точка покоя носит название *неустойчивого фокуса* (рис. 24).

3. Пусть корни  $\lambda_1, \lambda_2$  равны между собой ( $\lambda_1 = \lambda_2, a_{kl}$  действительна!). Тогда они действительны и общее решение системы (1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= (A + Bt)e^{\lambda_1 t}, \\ y &= (C + Dt)e^{\lambda_1 t}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $A, B, C, D$  – константы, связанные между собой двумя линейными уравнениями, которые можно получить, если подставить функции  $x$  и  $y$  в систему и сократить на множитель  $\exp(\lambda_1 t)$ .

Если  $\lambda_1 < 0$ , то  $\exp(\lambda_1 t) \rightarrow 0, t \exp(\lambda_1 t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и, следовательно, точка покоя  $x = 0, y = 0$  асимптотически устойчива. Ее называют *устойчивым узлом* (как в п. 1).

Если же  $\lambda_1 > 0$ , то точка  $x = 0, y = 0$  неустойчива и называется она *неустойчивым узлом*.

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $\Delta = 0$ , то характеристическое уравнение (3) имеет корень  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ .

Пусть  $\lambda_2 \neq 0$ . Тогда общее решение системы (1) запишется так:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные и  $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, -a_{22}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0$ .

Исключая параметр  $t$ , получим семейство параллельных прямых

$$y = C_1 \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} (x - C_1 \alpha_1).$$

Если  $\lambda_2 < 0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  на каждой траектории (на одном из параллельных лучей) точки приближаются к лежащей на этой траектории точке покоя  $x = C_1 \alpha_1, y =$

$$= C_1 \alpha_2 \left( y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x \right) \text{ (рис. 25).}$$

Точка  $(0, 0)$ , так же как любая точка прямой

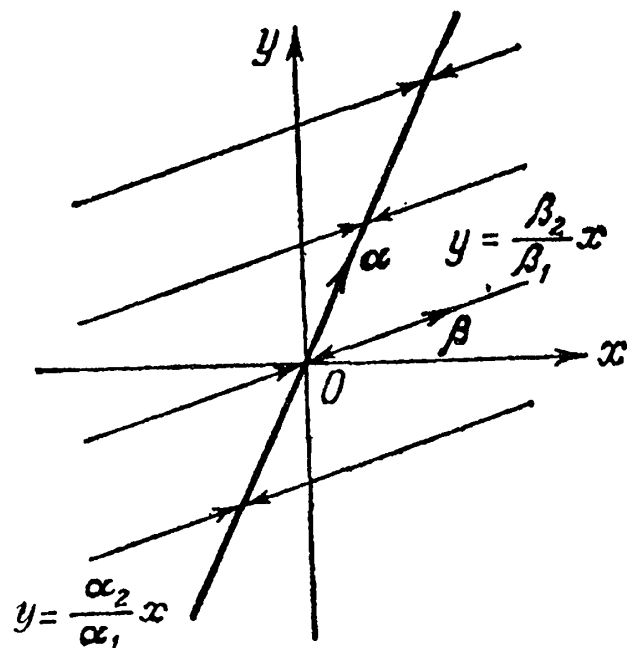


Рис. 25

$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x$ , при  $\lambda_2 < 0$  устойчива по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивой.

Если  $\lambda_2 > 0$ , то точка покоя неустойчива.

Если же  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то может быть два случая:

а) Общее решение системы (1) имеет вид  $x = C_1, y = C_2$ . В этом случае точка покоя  $x = y \equiv 0$  устойчива по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивой. Отметим, что данная ситуация имеет место, когда матрица  $A$  нулевая  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$ . В данном случае все точки плоскости  $(x, y)$  являются точками покоя, устойчивыми по Ляпунову.

б) Общее решение системы (1) имеет вид

$$x = C_1 + C_2 t, y = a + bt.$$

Точка покоя  $x = y \equiv 0$  неустойчива.

В этом случае  $a_{22} = -a_{11}, a_{12}a_{21} \leq 0$ .

**Пример 2.** Выяснить характер точки покоя системы

$$\dot{x} = -x + ay,$$

$$\dot{y} = -2y.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & a \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ . Значит, точка покоя  $x = y \equiv 0$  является устойчивым узлом.

**Пример 3.** Какого типа точку покоя имеет система

$$\dot{x} = x - y,$$

$$\dot{y} = 2x + 3y.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет комплексные корни  $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$ . Действительная часть этих сопряженных корней положительна,



поэтому точка покоя  $x = y \equiv 0$  является неустойчивым фокусом.

**З а м е ч а н и е 2.** Если матрица  $A$  симметрична, то, как мы знаем, характеристическое уравнение имеет только действительные корни<sup>1</sup>. Кроме того, мы знаем, что

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2.$$

Так как симметричная матрица порождает квадратичную форму эллиптического, гиперболического или параболического типа, то мы систему дифференциальных уравнений (1) в этом случае будем называть

*эллиптической*, если  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ ,

*гиперболической*, если  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ ,

*параболической*, если  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$ .

Из изложенного выше ясно, что если система (1) эллиптическая, то точка покоя будет устойчивым узлом, если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Это возможно, когда  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ .

Если же  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то точка покоя будет неустойчивым узлом ( $a_{11} > 0$ ,  $a_{22} > 0$ ).

Отметим, что в эллиптическом случае числа  $a_{11}$  и  $a_{22}$  одного знака.

Если система (1) гиперболическая ( $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ ), то точка покоя всегда неустойчива (седло).

Если система (1) параболическая, то точка покоя устойчива, когда  $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} \leq 0$ , и неустойчива, когда  $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0$ .

**Пример 4.** Выяснить характер точки покоя у систем:

а)  $\dot{x} = -3x + 2y$ ,

$$\dot{y} = 2x - 5y;$$

б)  $\dot{x} = x + 2y$ ,

$$\dot{y} = 2x + 3y;$$

в)  $\dot{x} = x + \sqrt{3}y$ ,

$$\dot{y} = \sqrt{3}x + 3y.$$

Во всех примерах матрица  $A$  симметрична.

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 24.

Система а) эллиптическая, потому что  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 11 > 0$ . Так как  $a_{11} = -3 < 0$ ,  $a_{22} = -5 < 0$ , то точка покоя – устойчивый узел.

Система б) гиперболическая, так как  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$ . Точка покоя – седло.

Система в) параболическая, потому что  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ . Так как  $a_{11} + a_{22} = 4 > 0$ , то точка покоя неустойчива.

**З а м е ч а н и е 3.** Можно доказать (так же как это сделано при  $n = 2$ ), что точка покоя заведомо устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) для линейной однородной системы из  $n \geq 1$  уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

если все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части.

## КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### § 2.1. Введение

Пусть в трехмерном пространстве, в котором определена прямоугольная система координат  $(x, y, z)$ , задана непрерывная поверхность

$$z = f(Q) = f(x, y) \quad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

где  $\Omega$  есть ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие его площади (двумерной меры, см. ниже § 2.2). В качестве  $\Omega$  может быть взят круг, прямоугольник, эллипс и т. д. Будем считать, что функция  $f(x, y)$  положительная, и поставим задачу: требуется определить объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью  $z = 0$  и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу  $\gamma$  плоского множества  $\Omega$ , с образующей параллельной оси  $z$ .

Искомый объем естественно определить следующим образом. Разделим  $\Omega$  на конечное число частей

$$\Omega_1, \dots, \Omega_N, \tag{1}$$

перекрывающихся между собой разве что по своим границам. Однако эти части должны быть такими, чтобы можно было определить их площади (двумерные меры), которые мы обозначим соответственно через  $m \Omega_1, \dots, m \Omega_N$ .

Введем понятие *диаметра* множества  $A$  — это есть точная верхняя грань  $d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|$ .

В каждой части  $\Omega_j$  выберем по произвольной точке  $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) и составим сумму

$$V_N = \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j, \quad (2)$$

которую естественно считать приближенным выражением искомого объема  $V$ . Надо думать, что приближение  $V \approx V_N$  будет тем более точным, чем меньшими будут диаметры  $d(\Omega_j)$  частей  $\Omega_j$ . Поэтому естественно *объем* нашего тела определить как предел суммы (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j, \quad (3)$$

когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения (1) стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует и равен одному и тому же числу независимо от способа последовательного разбиения  $\Omega$ .

Можно отвлечься от задачи о нахождении объема тела и смотреть на выражение (3) как на некоторую операцию, которая производится над функцией  $f$ , определенной на  $\Omega$ . Эта операция называется *операцией двойного интегрирования по Риману*<sup>1</sup> функции  $f$  на множестве  $\Omega$ , а ее результат — *определенным двойным интегралом (Римана) от  $f$  на  $\Omega$ , обозначаемым так:*

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{\Omega} f(Q) dQ = \int_{\Omega} f d\Omega. \end{aligned}$$

Пусть теперь в трехмерном пространстве, где определена прямоугольная система координат  $x, y, z$ , задано тело  $\Omega$  (множество) с неравномерно распределенной в нем массой с плотностью распределения  $\mu(x, y, z) = \mu(Q)$  ( $Q =$

<sup>1</sup> Б. Риман (1826–1866) — крупнейший немецкий математик.

$= (x, y, z) \in \Omega$ ). Требуется определить общую массу тела  $\Omega$ . Чтобы решить эту задачу, естественно произвести разбиение  $\Omega$  на части  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , объемы (трехмерные меры) которых (в предположении, что они существуют) пусть будут  $m\Omega_1, \dots, m\Omega_N$ , выбрать произвольным образом в каждой части по точке  $(Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j)$  и считать, что искомая масса равна

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) m\Omega_j. \quad (4)$$

Снова на выражение (4) можно смотреть как на определенную операцию над функцией  $\mu$ , заданной теперь на трехмерном множестве  $\Omega$ . Эта операция на этот раз называется *операцией тройного интегрирования (по Риману)*, а результат ее — *определенным тройным интегралом (Римана)*, обозначаемым так:

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) m\Omega_j = \int_{\Omega} \mu(Q) dQ = \\ &= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

В этом же духе определяется понятие  *$n$ -кратного интеграла Римана*.

Мы увидим, что часть теории кратного интегрирования, содержащая теоремы существования и теоремы об аддитивных свойствах интеграла, может быть изложена совершенно аналогично как в одномерном, так и в  *$n$ -мерном случае*. Однако в теории кратных интегралов возникают трудности, которых не было у нас при изложении теории однократных интегралов.

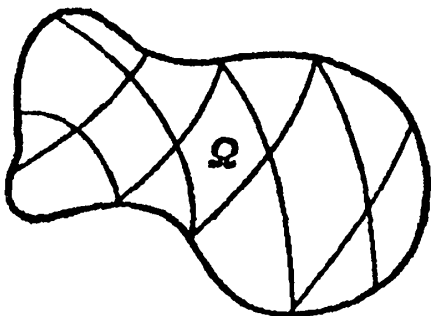


Рис. 26

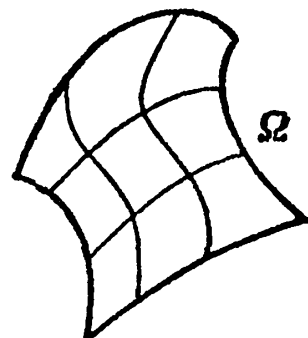


Рис. 27

Дело в том, что однократный интеграл Римана мы определили для очень простого множества – отрезка  $[a, b]$ , который дробился снова на отрезки. Никаких трудностей в определении длины (*одномерной меры*) отрезков не возникало. Между тем в случае двойных и вообще  $n$ -кратных интегралов область интегрирования  $\Omega$  приходится делить на части с криволинейными границами, и возникает вопрос об общем определении понятия площади или вообще  $n$ -мерной меры этих частей.

В двумерном случае мы будем иметь дело с ограниченными областями, имеющими *гладкую границу* (рис. 26) или *кусочно-гладкую границу* (рис. 27), т. е. состоящую из конечного числа гладких кусков (линий).

Эти области в свою очередь приходится делить на части, имеющие *кусочно-гладкую границу*.

Каждой такой области  $\omega$  и некоторым другим множествам можно привести в соответствие положительное число  $m\omega$ , называемое *площадью* или *двумерной мерой Жордана*<sup>1</sup> (общее определение двумерной меры Жордана дано в § 2.2).

При этом выполняются свойства:

1) Если  $\Delta$  – прямоугольник с основанием  $a$  и высотой  $b$ , то  $m\Delta = |\Delta| = ab$ .

2) Если  $\omega_1 \subset \omega_2$  и  $\omega_1, \omega_2$  имеют меры  $m\omega_1, m\omega_2$ , то  $m\omega_1 \leq m\omega_2$ .

3) Если область  $\omega$  разрезана при помощи кусочно-гладкой кривой на две части  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ), то

$$m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$$

Существуют множества двумерной меры нуль такие, как точка, отрезок, гладкая или кусочно-гладкая кривая.

В трехмерном случае нас будут интересовать области, имеющие в качестве своей границы кусочно-гладкие поверхности. Про такие области будем говорить, что они имеют кусочно-гладкую границу. Шар, эллипсоид, куб могут служить примерами таких областей.

Поверхность называется *гладкой*, если в любой ее точке к ней можно провести касательную плоскость, непрерывно изменяющуюся вместе с этой точкой. Поверхность называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разрезать на

<sup>1</sup> К. Жордан (1838–1922) – французский математик.

конечное число гладких кусков. По линиям разрезов касательные плоскости к поверхности могут и не существовать.

Для трехмерных ограниченных областей  $\omega$  с кусочно-гладкими границами можно определить их объем (трехмерную меру), т. е. положительное число  $m\omega$ , удовлетворяющее свойствам:

1) Если  $\Delta$  — прямоугольный параллелепипед с ребрами  $a, b, c$ , то  $m\Delta = |\delta| = abc$ .

2) Если  $\omega_1 \subset \omega_2$  и  $\omega_1, \omega_2$  имеют меры  $m\omega_1, m\omega_2$ , то

$$m\omega_1 \leq m\omega_2.$$

3) Если область  $\omega$  разрезана при помощи кусочно-гладкой поверхности на части  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ), то

$$m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$$

Есть множества трехмерной меры нуль. Такими являются точка, отрезок, прямоугольник (плоский), гладкая или кусочно-гладкая поверхность.

По аналогии можно рассматривать  $n$ -мерные области  $\omega$  ( $\omega \subset R_n$ ) с кусочно-гладкой границей и для них определить  $n$ -мерную меру —  $m\omega > 0$ , обладающую свойствами, подобными свойствам 1), 2), 3).

Прямоугольник  $\Delta$  в  $R_n$  определяется как множество точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_j \leq x_j \leq b_j \quad (j = 1, \dots, n; a_j < b_j).$$

Мера ( $n$ -мерная)  $\Delta$  определяется как произведение:

$$m\Delta = |\Delta| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Примером гладкой поверхности  $S \subset R_n$  может быть множество точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих уравнению

$$x_j = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \bar{g},$$

где  $j$  может иметь одно из значений  $j = 1, 2, \dots, n$ . При этом  $f$  есть непрерывно дифференцируемая функция на замыкании некоторой  $(n-1)$ -мерной ограниченной области  $g$  точек  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ .

Кусочно-гладкая поверхность в  $R_n$  по определению состоит из конечного числа гладких кусков (поверхностей), пересекающихся между собой разве что по их краям.

Повторим определение кратного интеграла, не прибегая к задачам геометрического или физического содержания.

Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $R_n$  задана ограниченная область  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  ( $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ ) и на  $\Omega$  (или  $\bar{\Omega}$ ) задана функция

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Разрежем  $\bar{\Omega}$  на части  $\Omega_j$ , пересекающиеся разве что по своим границам, которые будем считать кусочно-гладкими. Для краткости будем говорить, что мы произвели разбиение  $\rho$  множества  $\Omega$ .

Выберем в каждой части  $\Omega_j$  по произвольной точке  $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$  ( $\xi^j \in \Omega_j$ ) и составим сумму

$$S_\rho(f) = \sum_{j=1}^N f(\xi^j) m\Omega_j,$$

которую будем называть *интегральной суммой Римана* функции  $f$ , отвечающей разбиению  $\rho$ .

Предел суммы

$$\begin{aligned} \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} S_\rho(f) &= \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(\xi^j) m\Omega_j = \int_{\Omega} f(x) dx = \\ &= \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (5)$$

когда максимальный диаметр частичных множеств  $\Omega_j$  стремится к нулю, называется *кратным интегралом от функции  $f$  на  $\Omega$*  (или по  $\bar{\Omega}$ ).

Подчеркнем, что предел (5) называется кратным интегралом функции  $f$ , если он не зависит от выбора точек  $\xi_j$  в  $\Omega_j$  и не зависит от способов разбиения  $\rho$  области  $\Omega$ .

Сделаем несколько замечаний.

**Замечание 1.** Будем ли мы вычислять предел (5) для области  $\Omega$  или для ее замыкания  $\bar{\Omega}$ , не имеет значения. Это связано с тем, что  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница  $\Omega$ , предположенная кусочно-гладкой. А кусочно-гладкая граница имеет  $n$ -мерную меру нуль ( $m\Gamma = 0$ , см. ниже § 2.2).



**З а м е ч а н и е 2.** Если предел (5), т. е. кратный интеграл

$\int_{\Omega} f d\Omega$  существует, то функция

$f(x)$  ограничена на  $\bar{\Omega}$  ( $|f(x)| \leq M$ ). Это доказывается так же, как в случае одномерного определенного интеграла.

**З а м е ч а н и е 3.** Если  $\max d(\Omega_j) \rightarrow 0$ , то сумма мер тех частиц  $\Omega_j$ , которые непосредственно прилегают к кусочно-гладкой границе  $\Gamma$ , тоже стремится к нулю

$$\sum'' m\Omega_j \rightarrow 0.$$

Здесь двойной штрих при  $\sum$  обозначает, что сумма распространена на те части  $\Omega_j$ , которые прилегают к  $\Gamma$ .

Например, если область  $\Omega$  разрезать на части при помощи квадратной сетки, как на рис. 28, то соответствующее разбиение можно записать в виде

$$\Omega = \sum' \Omega_j + \sum'' \Omega_j,$$

где сумма  $\sum'$  распространена на полные квадратики

(попавшие в  $\Omega$ ), а сумма  $\sum''$  — на неполные квадратики.

Важно, что мера второй суммы стремится к нулю при неограниченном стремлении диаметра диагонали квадратов сетки к нулю:

$$\sum'' m\Omega_j \xrightarrow{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} 0.$$

**З а м е ч а н и е 4.** Из предыдущих замечаний следует, что

$$\left| \sum'' f(\xi^j) m\Omega_j \right| \leq \sum'' M \cdot m\Omega_j = M \sum'' m\Omega_j \xrightarrow{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} 0.$$

Это показывает, что интеграл (5) можно определить так же, как предел суммы

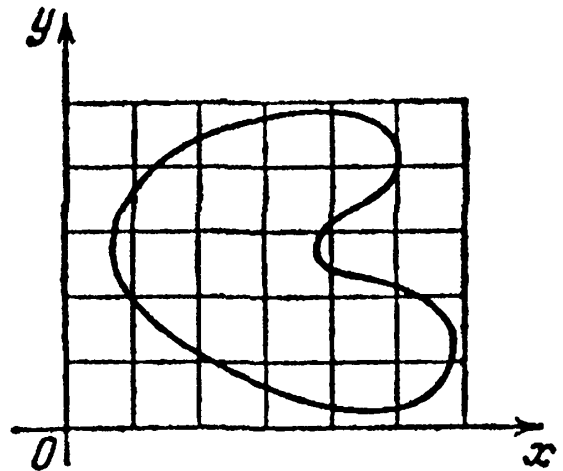


Рис. 28

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum' f(\xi^j) m\Omega_j = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

распространенной только на такие части  $\Omega$ , разбиения, которые не прилегают к  $\Gamma$ .

Замечания 1, 2, 3, 4 мы формально не обосновываем. Впрочем, они легко вытекают из приводимого ниже § 2.2.

### § 2.2. Сведения из теории меры Жордана

Ограничимся рассмотрением двумерных множеств. В плоскости зададим прямоугольную систему координат  $x, y$ .

Зададим натуральное число  $N$  и две системы прямых

$$x = kh, y = lh \quad (k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad h = 2^{-N},$$

определяющих в плоскости прямоугольную сетку, состоящую из квадратов со стороной  $h$ . Такую сетку мы будем называть  $h$ -сеткой (рис. 29). Ясно, что при переходе от  $N$  к  $N + 1$  каждый квадрат  $h$ -сетки ( $h = 2^{-N}$ ) разрезается на четыре равных квадратика. Последние образуют уже  $h = 2^{-N-1}$ -сетку.

В плоскости зададим произвольное ограниченное множество  $\Omega$  и для данного  $N$  введем два множества  $\underline{\Omega}_N$  и  $\bar{\Omega}_N$ . Первое из них  $\underline{\Omega}_N$  есть сумма (теоретико-множественная) квадратиков  $h$ -сетки ( $h = 2^{-N}$ ), каждый из которых полностью принадлежит к  $\Omega$  (на рис. 29 заштрихованная часть). Будем называть  $\underline{\Omega}_N$  *внутренней фигурой множества  $\Omega$*  (определяемой данной  $h$ -сеткой). Может случиться, что  $\underline{\Omega}_N$  есть пустое множество, т. е. нет ни одного квадратика, который бы полностью принадлежал к  $\Omega$ . Это имеет место, например, если  $\Omega$  есть множество, состоящее из конечного числа точек, или если это есть кусок гладкой кривой.

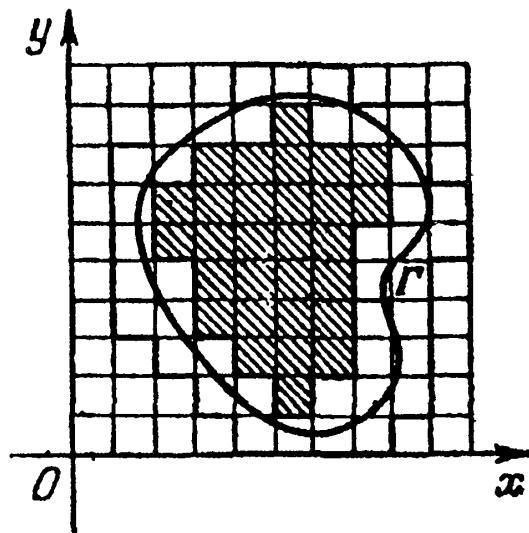


Рис. 29

Второе множество  $\bar{\Omega}_N$  мы называем *внешней фигурой множества  $\Omega$*  (определяемой данной  $h$ -сеткой). Оно есть сумма квадратиков  $h$ -сетки, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку  $\Omega$ .

Очевидно,

$$\underline{\Omega}_N \subset \Omega \subset \bar{\Omega}_N,$$

и площади фигур  $\underline{\Omega}_N, \bar{\Omega}_N$ , которые мы будем обозначать через  $|\underline{\Omega}_N|, |\bar{\Omega}_N|$ , удовлетворяют неравенству

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\bar{\Omega}_N| \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Если  $\underline{\Omega}_N$  – пустое множество, то считают  $|\underline{\Omega}_N| = 0$ .  
Нетрудно видеть, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \dots \subset \Omega \subset \dots \subset \bar{\Omega}_3 \subset \bar{\Omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1,$$

откуда

$$|\underline{\Omega}_1| \leq |\underline{\Omega}_2| \leq |\underline{\Omega}_3| \leq \dots \leq |\bar{\Omega}_3| \leq |\bar{\Omega}_2| \leq |\bar{\Omega}_1|.$$

Таким образом,

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\bar{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные числа  $N$  и  $M$ .

Если зафиксировать  $M$ , то получится, что числа  $|\underline{\Omega}_1|$  при неограниченном возрастании  $N$  не убывают, оставаясь не большими числа  $|\bar{\Omega}_M|$ . Это показывает, что существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| \leq |\bar{\Omega}_M|.$$

Его называют *внутренней мерой* множества  $\Omega$  и обозначают так:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| \leq m_i \Omega.$$

Это вполне определенное число, не зависящее от  $N$ . Мы получили неравенство

$$m_i \Omega \leq |\bar{\Omega}_M| \quad (M = 1, 2, \dots),$$

где числа  $|\bar{\Omega}_M|$  монотонно не возрастают при неограниченном возрастании  $M$ . Но тогда существует предел

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |\bar{\Omega}_M| \geq m_e \Omega,$$

который называют *внешней мерой Жордана* множества  $\Omega$  и обозначают через  $m_e \Omega$ .

Итак, произвольное ограниченное множество  $\Omega$  плоскости имеет внутреннюю и внешнюю меры  $m_i \Omega$  и  $m_e \Omega$ . Это неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенству  $m_i \Omega \leq m_e \Omega$ .

Если на самом деле имеет место равенство, то  $\Omega$  называют *измеримым по Жордану в двумерном смысле* и число

$$m\Omega = m_i \Omega = m_e \Omega$$

называют *двумерной мерой  $\Omega$  по Жордану*.

Меру Жордана мы будем называть также и просто мерой<sup>1</sup>.

Итак, множество  $\Omega$  измеримо (по Жордану), если для него

<sup>1</sup> В современной математике важное значение имеет еще другая мера – мера Лебега. А. Лебег (1875–1941) – французский математик.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|. \quad (1)$$

Обозначим через  $\Gamma$  границу множества  $\Omega$  ( $\Gamma = \partial\Omega$ ). Чтобы получить совокупность квадратиков сетки, покрывающих  $\Gamma$  или, как мы будем говорить, чтобы получить фигуру, покрывающую  $\Gamma$  (см. рис. 29), надо из фигуры  $\overline{\Omega}_N$  вычесть в теоретико-множественном смысле фигуру  $\underline{\Omega}_N$  и замкнуть полученное множество

$$\overline{\Gamma}_N = \overline{\overline{\Omega}_N \setminus \underline{\Omega}_N}.$$

Очевидно, площадь (двумерная мера)  $\overline{\Gamma}_N$  равна

$$|\overline{\Gamma}_N| = |\overline{\Omega}_N| - |\underline{\Omega}_N|.$$

Из (1) следует:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Gamma}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N| - \lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| = 0. \quad (2)$$

Обратно, из равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Gamma}_N| = 0, \quad (3)$$

учитывая, что пределы  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|$  и  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N|$  существуют, следует равенство (1), т. е. измеримость  $\Omega$ .

Заметим, что предел (3) есть внешняя мера  $\Gamma$ , т. е.

$$m_e \Gamma = 0.$$

Но  $0 \leq m_i \Gamma \leq m_e \Gamma$ , поэтому и

$$m_i \Gamma = m_e \Gamma = 0.$$

Мы доказали важное утверждение: для того, чтобы множество  $\Omega$  плоскости было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы мера его границы равнялась нулю ( $m\Gamma = 0$ ).

Ниже будет показано, что кусочно-гладкая кривая имеет двумерную меру нуль. Но тогда область  $\Omega$ , имеющая кусочно-гладкую границу, измерима в двумерном смысле по Жордану.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Множество  $\Omega$ , состоящее из одной точки, имеет двумерную меру нуль ( $m\Omega = 0$ ). Точка может принадлежать самое большее к четырем квадратикам  $h$ -сетки, их общая площадь стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $m_e \Omega = 0$ , но  $0 \leq m_i \Omega \leq m_e \Omega$ , поэтому  $m_i \Omega = m_e \Omega = m\Omega = 0$ .

Пример 2. Непрерывная кривая  $\Gamma$  (рис. 30)  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) имеет двумерную меру нуль ( $m\Gamma = 0$ ).

В самом деле, вследствие равномерной непрерывности  $f$  на  $[a, b]$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  для всех  $x', x'' \in [a, b]$ , удовлетворяющих неравенству  $|x' - x''| < \delta$ . Найденное  $\delta > 0$  можно уменьшить, как мы хотим. Будем считать, что  $\delta < \varepsilon$ . Зададим  $h$ -сетку с

$$h = 2^{-N} < \delta$$

и рассмотрим какой-либо столбик из квадратов сетки, содержащих в себе точки  $\Gamma$ . Его высота не превышает  $\varepsilon + 2h$  (на рис. 30 при  $\varepsilon = 2h$  выделенный столбик включает четыре квадратика  $h$ -сетки, содержащих точки  $\Gamma$  и  $\varepsilon + 2h = 4h$ ), а площадь не превышает

$$(\varepsilon + 2h)h \cdot \frac{K}{h} = (\varepsilon + 2h)K \leq 3\varepsilon K,$$

где  $K$  — длина некоторого отрезка, содержащего в себе отрезок  $[a, b]$ .

Это показывает, что общая площадь  $|\bar{\Gamma}_N|$  квадратиков, покрывающих кривую  $\Gamma$ , при достаточно большом  $N$  может быть сделана меньшей наперед заданного как угодно малого положительного числа, и, следовательно, внешняя мера  $\Gamma$ , тем более внутренняя, равна нулю. Но тогда

$$m\Gamma = 0$$

Так как сумма конечного числа множеств, имеющих меру нуль, очевидно, имеет меру нуль, то из примера 1 следует, что двумерная мера множества, состоящего из конечного числа точек, равна нулю.

А из примера 2 следует, что гладкая кривая

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), (a \leq t \leq b) \quad (4)$$

имеет двумерную меру нуль (рис. 31).

Дело в том, что если  $\Gamma$  — гладкая кривая, то отрезок  $[a, b]$  можно разделить на конечное число отрезков точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

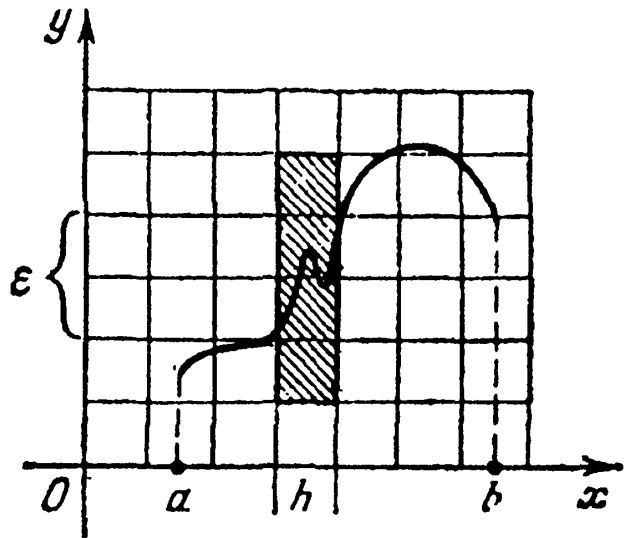


Рис. 30

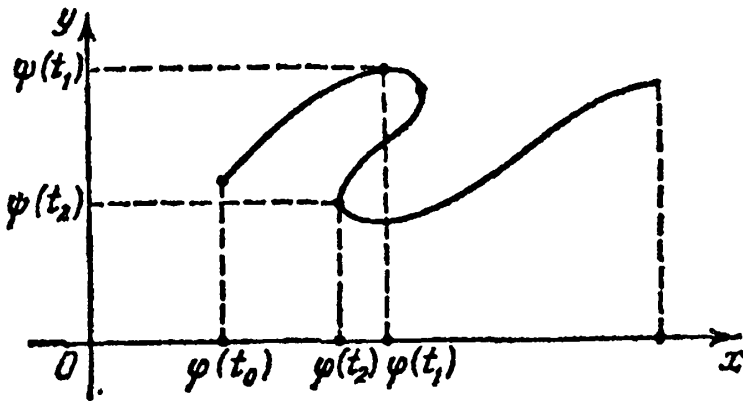


Рис. 31

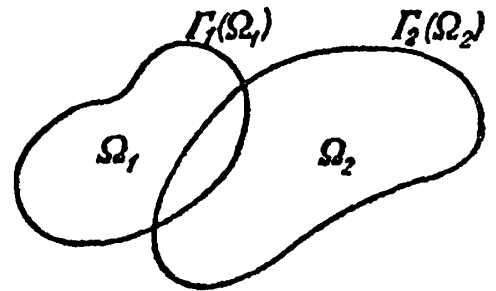


Рис. 32

так, что на каждом частичном отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$  одно из двух уравнений (4) можно разрешить относительно  $t$  и подставить во второе. В результате получим, что соответствующий кусок  $\Gamma_j$  кривой  $\Gamma$  описывается либо уравнением вида

$$y = f(x) \quad (x \in [c, d]),$$

либо уравнением вида

$$x = g(y) \quad (y \in [p, q]),$$

где функции  $f$  и  $g$  непрерывны на соответствующих отрезках. Но тогда, как мы знаем из примера 2,

$$m\Gamma_j = 0 \quad (j = 1, \dots, r).$$

Поэтому, так как  $\Gamma$  есть сумма конечного числа кусков  $\Gamma_j$ ,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^r \Gamma_j,$$

каждый из которых имеет меру нуль, то  $m\Gamma = 0$ .

Отметим, что если два множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы, то измеримы также их сумма  $\Omega_1 + \Omega_2$ , разность  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  и пересечение  $\Omega_1 \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2$ .

В самом деле, обозначим через  $\Gamma(\epsilon)$  границу множества  $\epsilon$ . На рис. 32 изображены два множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\Omega_1 + \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \setminus \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы, то  $m\Gamma(\Omega_1) = 0$ ,  $m\Gamma(\Omega_2) = 0$ , но тогда и меры левых частей (5) равны нулю, что показывает, что множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \Omega_2$  измеримы.

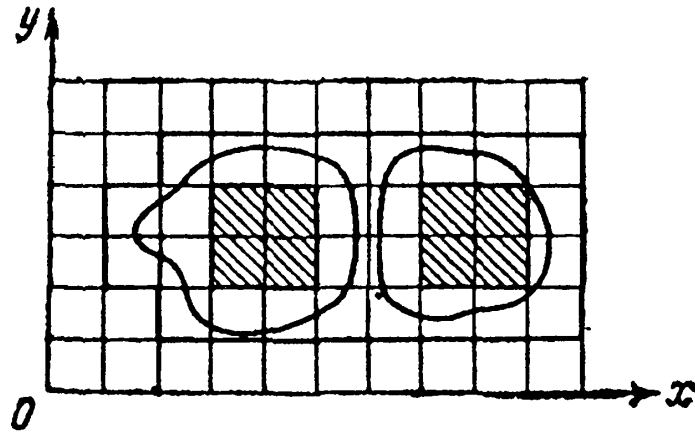


Рис. 33

Здесь мы воспользовались очевидным свойством меры. Если множество  $\omega$  имеет меру нуль, то и любое его подмножество имеет меру нуль.

Наконец, если  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  – измеримые множества, пересекающиеся разве что по своим границам, то

$$m(\Omega^1 + \Omega^2) = m\Omega^1 + m\Omega^2. \quad (6)$$

В самом деле, очевидно (рис. 33)

$$\underline{\Omega}_N^1 + \underline{\Omega}_N^2 \subset \underline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N \subset \overline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N \subset \overline{\Omega}_N^1 + \overline{\Omega}_N^2,$$

и так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N^1| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N^1| = m\Omega^1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N^2| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N^2| = m\Omega^2,$$

то, очевидно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{(\Omega^1 + \Omega^2)}_N| = m\Omega^1 + m\Omega^2,$$

что доказывает (6).

Отметим, что если область  $\Omega$  измерима, то ее мера Жордана равна мере ее замыкания:

$$m\Omega = m\overline{\Omega}.$$

В самом деле,  $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , где  $\Gamma$  – граница  $\Omega$  и  $m\overline{\Omega} = m\Omega + m\Gamma$ , где  $m\Gamma = 0$ .

**Пример 3.** Множество  $\omega$ , состоящее из всех рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$ , не измеримо по Жордану:  $m_i\omega = 0$ ,  $m_e\omega = 1$ .

В трехмерном случае теория меры Жордана аналогична. Теперь вводится прямоугольная система координат  $x, y, z$  и три семейства параллельных плоскостей

$$x = kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y = lh \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$z = mh \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

делящих пространство на кубики с ребром  $h = 2^{-N}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Такое разбиение пространства мы снова называем  $h$ -сеткой (трехмерной).

Пусть  $\Omega$  есть ограниченное множество точек, принадлежащих пространству. Обозначим через  $\underline{\Omega}_N$  внутреннюю фигуру множества  $\Omega$  – совокупность кубиков сетки, полностью принадлежащих  $\Omega$ , и через  $\overline{\Omega}_N$  – внешнюю фигуру множества  $\Omega$  – совокупность кубиков сетки, каждый из которых содержит хотя бы одну точку  $\Omega$ .

Снова заключаем, что

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \dots \subset \Omega,$$

$$\overline{\Omega}_1 \supset \overline{\Omega}_2 \supset \overline{\Omega}_3 \supset \dots \supset \Omega,$$

откуда следует:

$$|\underline{\Omega}_1| \leq |\underline{\Omega}_2| \leq |\underline{\Omega}_3| \leq \dots,$$

$$|\overline{\Omega}_1| \geq |\overline{\Omega}_2| \geq |\overline{\Omega}_3| \geq \dots$$

и

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\overline{\Omega}_M|,$$

каковы бы ни были натуральные  $N$  и  $M$ . Отсюда вытекает существование пределов

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

Первый предел в этом неравенстве называется *внутренней* (трехмерной) *мерой*  $\Omega$ :

$$m_i \Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N|,$$

а второй – *внешней мерой*  $\Omega$ :

$$m_e \Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

Таким образом,

$$m_i \Omega \leq m_e \Omega.$$

Если

$$m_i \Omega = m_e \Omega = m \Omega,$$

то множество  $\Omega$  называют *измеримым в трехмерном смысле по Жордану* и число  $m \Omega$  называют его *трехмерной мерой*.



Рассуждениями, подобными тем, которые велись в связи с равенствами (1), (2), (3), доказывается, что множество измеримо в трехмерном смысле тогда и только тогда, когда его граница имеет трехмерную меру нуль.

Мы не будем формулировать дальнейшие свойства измеримых в трехмерном смысле множеств. Они аналогичны отмеченным выше свойствам множеств, измеримых в двумерном смысле.

Остановимся только на объяснении того, что кусочно-гладкая поверхность имеет трехмерную меру нуль. Такая поверхность состоит из конечного числа кусков  $S$ , пересекающихся разве что по своим краям, каждый из которых при соответствующем переобозначении координат определяется уравнением

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{g}),$$

где  $\bar{g}$  — замыкание некоторой ограниченной в плоскости  $x, y$  области.

Зададим  $\varepsilon > 0$  и подберем  $\delta > 0$  так, чтобы

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

для всех точек  $(x', y')$ ,  $(x'', y'') \in \bar{g}$ , находящихся на расстоянии друг от друга

$$|(x', y') - (x'', y'')| < \delta.$$

Считаем  $\delta < \varepsilon$  и берем  $h$ -сетку с  $h = 2^{-N} < \delta$ . Рассматриваем какой-либо столбик из кубиков сетки, содержащих в себе точки  $S$ . Его высота не превышает  $\varepsilon + 2h$ , а объем не превышает  $(\varepsilon + 2h)h^2$ . Общий объем всех таких столбиков, покрывающих  $S$ , не превышает

$$(\varepsilon + 2h)h^2 \cdot \frac{K}{h^2} = (\varepsilon + 2h)K < 3\varepsilon K. \quad (7)$$

Здесь  $K$  есть площадь квадрата  $\Delta$ , покрывающего множество  $\bar{g}$ . Правая часть (7) может быть взята как угодно малой, что доказывает, что трехмерная мера  $mS = 0$ .

Можно ввести по аналогии понятие  $n$ -мерной меры для множеств пространства  $R_n$  и показать, что гладкая поверхность в  $R_n$  имеет  $n$ -мерную меру нуль.

## § 2.3. Свойства кратных интегралов.

### Теоремы существования

В дальнейшем  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  будут области с кусочно-гладкой границей (хотя их можно считать и произвольными измеримыми по Жордану множествами).

Справедливо равенство

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega} 1 \cdot dx = m\Omega. \quad (1)$$

Это равенство очевидно. Чтобы вычислить интеграл (1), надо разрезать кусочно-гладкими поверхностями область  $\Omega$  на части

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k,$$

пересекающиеся разве что по своим границам (рис. 34), и учесть, что

$$\sum_{k=1}^N 1 \cdot m\Omega_k = \sum_{k=1}^N m\Omega_k = m\Omega.$$

Но тогда

$$\lim_{\max d(\Omega_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N m\Omega_k = m\Omega.$$

По формуле (1) в двумерном случае вычисляется площадь  $\Omega$ , в трехмерном — объем  $\Omega$ . В  $n$ -мерном же случае формула (1) дает  $n$ -мерную меру  $\Omega$ .

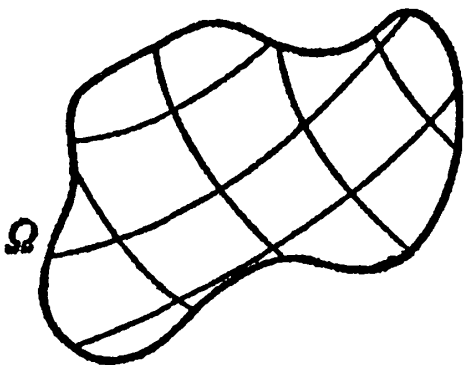


Рис. 34

Мы увидим в дальнейшем, что вычисление интеграла (1) и более

общего интеграла  $\int_{\Omega} f dx$  может

быть сведено к последовательному вычислению некоторых одномерных интегралов (см. § 2.4).

Ниже мы предполагаем, что для функций  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $|f(x)|$ , о которых будет идти речь, рассматриваемые интегралы существуют. Мы не будем оговаривать это обстоятельство особо.

Справедливо равенство

$$\int_{\Omega} [Af(x) + B\varphi(x)] dx = A \int_{\Omega} f(x) dx + B \int_{\Omega} \varphi(x) dx, \quad (2)$$

где  $A$  и  $B$  — константы.

Если область  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей разрезана на измеримые части  $\Omega_1, \Omega_2$  ( $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2$ ), то

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega_1} f dx + \int_{\Omega_2} f dx. \quad (3)$$

Если

$$f(x) \leq \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \quad (4)$$

то

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} \varphi(x) dx. \quad (5)$$

Но тогда, учитывая, что

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

получим в силу (2) (при  $A = -1, B = 0$ ), что

$$-\int_{\Omega} |f(x)| dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

т. е.

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx. \quad (6)$$

В частности, из (6) следует, что если

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in \Omega), \quad (7)$$

где  $M$  — константа, то

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} M dx = M \int_{\Omega} dx = M \cdot m\Omega. \quad (8)$$

Справедлива теорема существования (доказательство см. § 2.5).

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на замыкании  $\bar{\Omega}$  ограниченной области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей, то она интегрируема на  $\Omega$  так же, как на  $\bar{\Omega}$ , и

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\bar{\Omega}} f(x) dx. \quad (9)$$

Отметим, что

$$\int_{\bar{\Omega}} f dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} f dx = \int_{\Omega} f dx + 0 = \int_{\Omega} f dx,$$

где  $\Gamma$  — граница  $\Omega$ . По условию  $\Gamma$  — кусочно-гладкая граница. Ее мера ( $n$ -мерная) равна нулю ( $m\Gamma = 0$ ), следовательно,

$$\int_{\Gamma} f dx = 0.$$

Сформулируем более общую теорему существования.

**Теорема 2.** *Если функция  $f(x)$  ограничена и непрерывна на замыкании  $\bar{\Omega}$  ограниченной области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей, за исключением отдельных точек и гладких кривых в конечном числе, где она может иметь разрывы, то  $f$  интегрируема на  $\Omega$  так же, как на  $\bar{\Omega}$ , и выполняется равенство (9).*

Отметим еще теорему.

**Теорема 3 (о среднем).** *Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ , которое мы будем предполагать связным<sup>1</sup>. Тогда существует точка  $x^0$  такая ( $x^0 \in \bar{\Omega}$ ), что выполняется равенство*

$$\int_{\Omega} f(x) dx = f(x^0) m\Omega. \quad (10)$$

**Доказательство.** По условию функция  $f$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{\Omega}$ , поэтому на  $\bar{\Omega}$  существуют точки  $x^1$  и  $x^2$  ( $x^1, x^2 \in \bar{\Omega}$ ), в которых  $f$  достигает соответственно своего минимума и максимума на  $\bar{\Omega}$ :

$$f(x^1) \leq f(x) \leq f(x^2) \quad (\forall x \in \bar{\Omega}),$$

Интегрируя эти неравенства по  $\Omega$ , получим

<sup>1</sup> Множество  $E$  называется *связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей  $E$ .

$$\int_{\Omega} f(x^1) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x^2) dx$$

или

$$f(x^1)m\Omega \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq f(x^2)m\Omega. \quad (11)$$

Из неравенства (11) следует, что число

$$C = \frac{1}{m\Omega} \int_{\Omega} f dx \quad (m\Omega \neq 0)$$

находится между наименьшим значением функции  $f(x^1)$  и наибольшим  $f(x^2)$ . В силу связности  $\bar{\Omega}$  существует принадлежащая к  $\bar{\Omega}$  непрерывная кривая

$$r(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

соединяющая точки  $x^1$  и  $x^2$ , т. е. такая, что

$$r(t_1) = x^1, \quad r(t_2) = x^2.$$

**Функция**

$$F(t) \equiv \mathcal{A}[r(t)] = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

непрерывна на отрезке  $[t_1, t_2]$  (как суперпозиция непрерывных функций) и принимает на его концах значения

$$F(t_1) = f(x^1), \quad F(t_2) = f(x^2).$$

Но тогда по теореме о промежуточном значении для функции  $F(t)$  от одного переменного, существует такое  $t_0 \in [t_1, t_2]$ , что в точке  $x^0 = r(t_0)$  имеет место равенство

$$F(t_0) = \mathcal{A}[r(t_0)] = f(x^0) = C,$$

и мы доказали (10).

**Замечание.** Число  $f(x^0)$ , фигурирующее в (10), называется *средним значением* непрерывной функции  $f$  на области  $\Omega$ .

## § 2.4. Сведение кратного интеграла к повторным

Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (1)$$

где функция  $f(x, y)$  задана на прямоугольнике

$$\Delta = [a, b] \times [c, d], \quad (2)$$

т. е. на множестве точек  $(x, y)$ , где

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (a < b, \quad c < d).$$

Здесь интегрирование производится по переменной  $y$ . Но подынтегральная функция зависит не только от  $y$ , но и от  $x$ , поэтому интеграл (1) есть функция  $F$  от  $x$ .

Говорят, что интеграл (1) есть функция от параметра  $x$ .

**Теорема 1.** *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике  $\Delta$ , то функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .*

**Доказательство.** Имеем

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^d [f(x+h, y) - f(x, y)] dy$$

$$(x, x+h \in [a, b]).$$

Так как функция  $f$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\Delta$ , то она равномерно непрерывна на  $\Delta$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x+h, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

для всех  $(x, y), (x+h, y) \in \Delta$ , лишь бы  $|h| < \delta$ . Но тогда

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c} dy = \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot (d-c) = \varepsilon,$$

и теорема доказана.

**Теорема 2.** При условиях теоремы 1 существует повторный интеграл

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \quad (3)$$

В самом деле, непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $F(x)$  интегрируема на нем.

**Теорема 3.** При условиях теоремы 1 справедливы равенства

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx. \quad (4)$$

Первый член цепи (4) есть кратный интеграл от непрерывной функции на замкнутом множестве  $\Delta$  с кусочно-гладкой границей. Он существует (см. ниже § 2.5). Повторные интегралы, представляющие собой второй и третий члены цепи равенства (4), тоже существуют по теореме 2.

Данная теорема утверждает равенство этих трех интегралов. Тем самым вычисление кратного интеграла сводится к вычислению одномерных интегралов по каждой переменной  $x, y$  в отдельности.

**Доказательство.** Разделим стороны  $\Delta$  на  $N$  равных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_N = d,$$

и через точки деления проведем прямые, параллельные соответственно оси  $y$  и оси  $x$ . Этим  $\Delta$  разделится на равные прямоугольники  $\Delta_{kl}$ :

$$\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta_{kl}, \quad \Delta_{kl} = \{x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_l \leq y \leq y_{l+1}\}$$

и

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_c^d f(x, y)dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y) dy \Delta x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta_l \quad (5) \\
 &(x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}, y_l \leq \eta_l \leq y_{l+1}).
 \end{aligned}$$

Мы применили сначала к интегралу  $\int_{x_k}^{x_{k+1}}$  по  $x$  от функции

$\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy$  теорему о среднем, а затем к интегралу

$\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y) dy$  ту же теорему.

Мы доказали, что повторный интеграл в левой части (5) можно рассматривать как интегральную сумму кратного интеграла  $\iint_{\Delta} f dx dy$ , соответствующую разбиению  $\Delta$  на части  $\Delta_{kl}$

при некоторых точках  $(\xi_k, \eta_l) \in \Delta_{kl}$ .

Перейдем теперь к пределу в равенстве (5) при  $N \rightarrow \infty$ . Левая часть (5) при этом есть определенное (не зависящее от  $N$ ) число, а правая часть стремится при  $N \rightarrow \infty$  к кратному интегралу от  $f$  по  $\Delta$  (если кратный интеграл существует, то любая интегральная сумма стремится к этому интегралу). Поэтому

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Delta} f dx dy,$$

и мы доказали первое равенство (4). Равенство второго повторного интеграла с кратным интегралом доказывается аналогично.

Рассмотрим в плоскости  $x, y$  область  $\Omega$ , ограниченную гладкими кривыми (рис. 35)



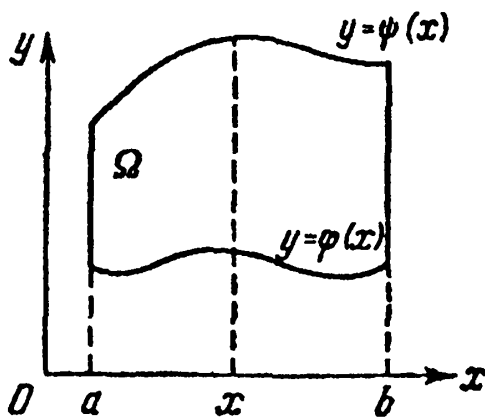


Рис. 35

$$y = \varphi(x), y = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

где

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Пусть на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  задана произвольная непрерывная функция  $f(x, y)$ . Чтобы вычислить кратный интеграл от  $f(x, y)$  по области  $\Omega$  (или, что все равно, по  $\bar{\Omega}$ ), применяют следующий метод: сначала интегрируют функцию  $f(x, y)$  по переменной  $y$  от  $y = \varphi(x)$  до  $y = \psi(x)$ , считая  $x$  постоянным, а затем результат интегрируют по  $x$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (6)$$

В случае, когда  $\Omega$  есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, равенство (6) было выше обосновано (см. теорему 3). Теми же рассуждениями можно было бы обосновать (6) и в общем случае.

**Пример 1.** Вычислить площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0).$$

Мы называем эллипсом множество точек  $(x, y)$ , для которых  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , так же как множество точек  $(x, y)$ ,

для которых  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Подобную вольность мы будем позволять себе, называя эллипсоидом как множество то-

чек  $(x, y, z)$ , для которых  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , так и множество точек  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Решение.** Область  $\Omega$ , о которой идет речь, ограничена снизу кривой

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

и сверху кривой

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Искомая площадь равна

$$\begin{aligned} m\Omega &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = (x = a \sin \theta, dx = a \cos \theta d\theta) = \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = 2ab \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры  $\Omega$ , ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = a^2$  (рис. 36).

Имеем

$$\begin{aligned} m\Omega &= \iint_{\Omega} dx dy = 2 \int_0^{a^2} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = \\ &= 2 \int_0^{a^2} \sqrt{y} dy = \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

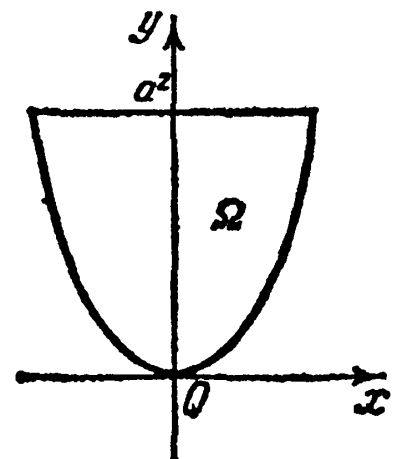


Рис. 36

Метод вычисления кратных интегралов сведением их к одномерным применяется в пространствах любых измерений. Покажем это на примерах.

**Пример 3.** Требуется вычислить объем  $\Omega$  эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a, b, c > 0).$$

Решим относительно  $z$  уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Получим две непрерывные функции

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Они определены на множестве  $\omega$  точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Объем или трехмерная мера  $\Omega$  равен кратному интегралу

$$V = m\Omega = \iiint_{\Omega} 1 \cdot dx dy dz.$$

Чтобы его вычислить, надо для любой точки  $(x, y) \in \omega$  проинтегрировать единичную функцию (равную 1) по  $z$  от

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ до } z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Результат, зависящий от  $(x, y)$ , затем надо проинтегрировать по всем точкам  $(x, y) \in \omega$  :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\omega} dx dy \int_{-c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz = \\ &= 2c \iint_{\omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \end{aligned}$$

$$= 2c \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy.$$

Последнее равенство в этой цепи следует из формулы (6). Дальнейшие вычисления требуют владения техникой интегрирования:

$$\begin{aligned} V &= \frac{8c}{b} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) - y^2} dy = \\ &= \left( y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \sin t \right) = \frac{8c}{b} \int_0^a dx \int_0^{\pi/2} \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \cos^2 t dt = \\ &= \frac{8bc}{a^2} \frac{\pi}{4} \int_0^a (a^2-x^2) dx; \\ &\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Далее

$$V = \frac{2\pi bc}{a^2} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

**Пример 4.** Найти объем части параболоида вращения  $\Omega$ :  $x^2 + y^2 \leq z \leq a^2$  (рис. 37).

Так же как в примере 3, имеем

$$m\Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^{a^2} dz,$$

где  $\omega$  — множество точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , т. е. это круг радиуса  $a$ . Далее имеем

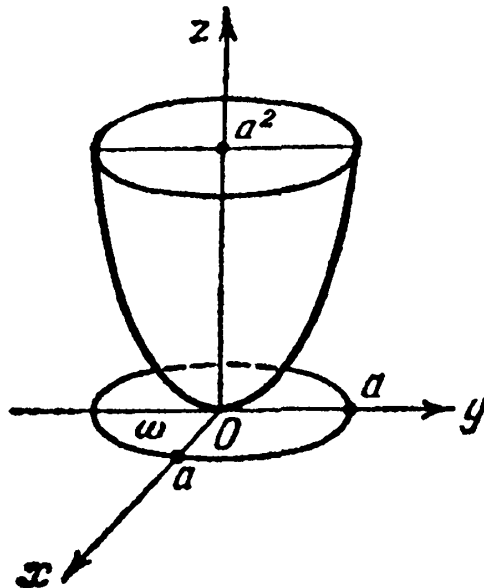


Рис. 37

$$\begin{aligned}
 m\Omega &= \iint_{\omega} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2 - y^2) dy = \\
 &= 4 \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2 - y^2) dy = \frac{8}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \\
 &= (x = a \sin t) = \frac{8a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{8a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\
 &= \frac{\pi a^4}{3} + \frac{2a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4t) dt = \\
 &= \frac{\pi a^4}{3} + \frac{\pi a^4}{6} = \frac{\pi a^4}{2}.
 \end{aligned}$$

**Пример 5.** Найти объем тела  $\Omega$ , ограниченного поверхностями параболоидов вращения  $x^2 + y^2 = z$ ,  $z = 2(x^2 + y^2)$  и цилиндрическими поверхностями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$  (рис. 38).

Наше тело представляет собой «параболический башмачок», который вырезают цилиндрические поверхности

$y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$  между параболоидами вращения. Снизу башмачок ограничен куском поверхности  $z = x^2 + y^2$ , а сверху куском поверхности параболоида вращения  $z = 2(x^2 + y^2)$ . Проекция этого тела  $\Omega$  на плоскость  $(x, y)$  дает множество  $\omega$ , состоящее из точек  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам:  $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ .

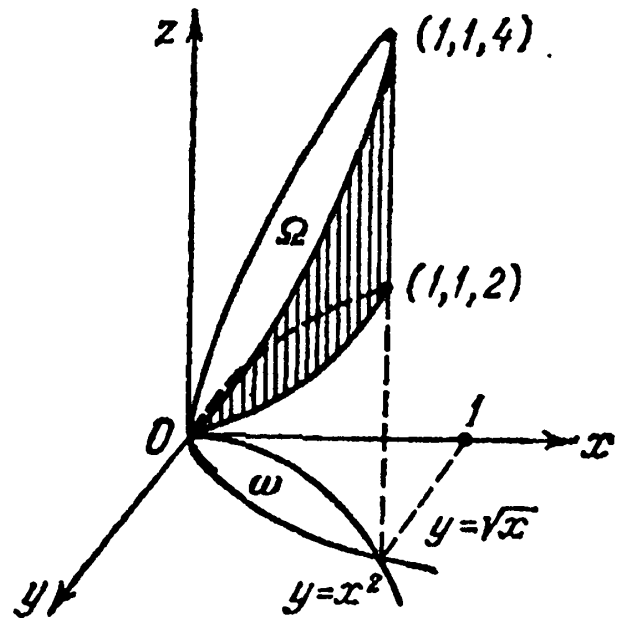


Рис. 38

Поэтому

$$\begin{aligned}
 m\Omega &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \\
 &= \iint_{\omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \iint_{\omega} (x^2 + y^2) dx dy = \\
 &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[ x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{3}(x^{3/2} - x^6) \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x^{5/2} - x^4 + \frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35}.
 \end{aligned}$$

Вернемся снова к интегралу (1), зависящему от параметра.

**Теорема 4.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывную производную  $f'_x$  на прямоугольнике

$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$

то функция

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

имеет производную на отрезке  $[a, b]$ , причем

$$F'(x) = \int_c^d f'_x(x, y) dy. \quad (7)$$

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \int_c^d f'_x(x, y) dy. \quad (8)$$

Имеем, применяя теорему Лагранжа

$$\frac{\Delta F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_c^d f'_x(x + \theta h, y) dy, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta F(x)}{h} - \int_c^d f'_x(x, y) dy \right| &= \left| \int_c^d [f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)] dy \right| \leq \\ &\leq \int_c^d |f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)| dy \leq \int_c^d \varepsilon dy = \varepsilon(d - c) \end{aligned}$$

при  $|h| < \delta$ , где  $\delta$  зависящее от  $\varepsilon$  достаточно мало. Дело в том, что функция  $f'_x(x, y)$  непрерывная на  $\Delta$ , равномерно-непрерывная на  $\Delta$ , т. е. для  $\forall \eta \exists \delta$ :

$$|f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)| < \varepsilon$$

для любых  $(x, y), (x+h, y) \in \Delta$ .

Таким образом, равенство (8), а с ним и (7) доказано.

Рассмотрим теперь более общий, чем (1) интеграл

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad (9)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

а  $f(x, y)$  непрерывна для всех точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x).$$

Покажем, что при указанных условиях функция  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

В самом деле, заменим в интеграле (9) переменную интегрирования  $y$  на другую переменную  $u$  при помощи равенства

$$y = \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)] \quad (a \leq x \leq b). \quad (10)$$

При  $u = 0$   $y = \varphi(x)$ , при  $u = 1$   $y = \psi(x)$ ,  $dy = [\psi(x) - \varphi(x)]du$  ( $x$  фиксировано, и его мы считаем постоянным при замене переменной). Следовательно,

$$F(x) = [\psi(x) - \varphi(x)] \int_0^1 f(x, \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)]) du. \quad (11)$$

Здесь множитель  $\psi(x) - \varphi(x)$  есть непрерывная функция от  $x \in [a, b]$ , а под знаком интеграла стоит непрерывная функция от точки  $(x, u)$ , принадлежащей прямоугольнику  $[a, b] \times [0, 1]$ . Поэтому сам интеграл — непрерывная функция на  $[a, b]$  согласно теореме 1. Функция  $F(x)$  будет непрерывной на  $[a, b]$ , как произведение двух непрерывных функций.

**Теорема 5.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $f'_x$  на

$$\Omega = \{ a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \},$$

а функции  $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$  непрерывны на  $[a, b]$ , то функция (9) имеет производную, вычисляемую по формуле

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x, y) dy + \psi'(x)f(x, \psi(x)) - \varphi'(x)f(x, \varphi(x)). \quad (12)$$

**Доказательство.** Введем вспомогательную функцию

$$I(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy,$$



заданную на множестве  $\{a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq u \leq v \leq \psi(x)\}$ .

Согласно теореме 4

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_u^v f'_x(x, y) dy.$$

Используя правило дифференцирования интеграла с переменным пределом интегрирования, имеем

$$\frac{\partial I}{\partial v} = f(x, v), \quad \frac{\partial I}{\partial u} = -f(x, u).$$

Далее  $F(x) = \Pi[x, \varphi(x), \psi(x)]$ , поэтому по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial \Pi[x, \varphi(x), \psi(x)]}{\partial x} + \frac{\partial \Pi[\dots]}{\partial u} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \Pi[\dots]}{\partial v} \frac{d\psi}{dx} = \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x, y) dy - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 6.** Найти производную от функции

$$F(x) = \int_{x^2}^x \sin(x^2 + y^2) dy.$$

Согласно (12) получаем

$$F'(x) = \int_{x^2}^x \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x dy + 1 \cdot \sin(x^2 + x^2) - 2x \sin(x^2 + x^2).$$

## § 2.5. Доказательство существования интеграла от непрерывной функции

Зададим на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{\Omega}$  пространства  $R_n$  непрерывную функцию  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Считаем, что  $m\Omega > 0$ . Произведем два разбиения  $\rho$  и  $\rho'$  области  $\Omega$  на измеримые части, пересекающиеся в каждом случае разве что по своим границам:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega = \bigcup_{l=1}^M \Omega'_l$$

и определим соответствующие им интегральные суммы

$$S_\rho = \sum_{k=1}^N f(\xi^k) m\Omega_k \quad (\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \in \Omega_k),$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^M f(\eta^l) m\Omega'_l \quad (\eta^l = (\eta_1^l, \dots, \eta_n^l) \in \Omega'_l).$$

Пересечение  $\Omega_k$  и  $\Omega'_l$  обозначим через

$$\Omega_{kl} = \Omega_k \cap \Omega'_l.$$

Очевидно,

$$S_\rho = \sum_{k=1}^N f(\xi^k) \sum_{l=1}^M m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(\xi^k) m\Omega_{kl},$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^M f(\eta^l) \sum_{k=1}^N m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(\eta^l) m\Omega_{kl}.$$

Поэтому

$$|S_\rho - S_{\rho'}| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M |f(\xi^k) - f(\eta^l)| m\Omega_{kl} \leq \sum' |f(\xi^k) - f(\eta^l)| m\Omega_{kl},$$

где сумма  $\sum'$  распространена на не пустые множества  $\Omega_{kl}$  — ведь мера пустого множества все равно равна нулю.

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{\Omega}$ , то она равномерно непрерывна на нем, поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega}$$

для любых  $x', x'' \in \bar{\Omega}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|x' - x''| < \delta.$$

Будем считать, что разбиение  $\rho$  и  $\rho'$  таковы, что диаметры их частичных множеств меньше  $\delta$ :

$$d(\Omega_k) < \delta, d(\Omega'_l) < \delta. \quad (1)$$

Но тогда на не пустом множестве  $\Omega_{kl}$

$$\begin{aligned} |f(\xi^k) - f(\eta^l)| &= |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl}) + f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| \leq |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl})| + \\ &+ |f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega} + \frac{\varepsilon}{2m\Omega} = \frac{\varepsilon}{m\Omega}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda^{kl} = (\lambda_1^{kl}, \dots, \lambda_n^{kl})$$

есть некоторая точка, принадлежащая к  $\Omega_{kl}$ . Но тогда при выполнении условия (1)

$$|S_\rho - S_{\rho'}| < \sum' \frac{\varepsilon}{m\Omega} m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \sum' m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \cdot m\Omega = \varepsilon, \quad (2)$$

что, как можно доказать, влечет существование интеграла от  $f$  по  $\bar{\Omega}$ .

В самом деле, зададим последовательность разбиений

$$\rho^l: \sum_{j=1}^{N_l} \Omega_j^l = \Omega \quad (l = 1, 2, \dots)$$

таких, что

$$\max_j d(\Omega_j^l) \rightarrow 0. \quad (3)$$

На основании свойств (1) и (2) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $N$  такое, что

$$|S_{\rho^l} - S_{\rho^m}| < \varepsilon \quad (l, m > N).$$

Но тогда, согласно критерию Коши, существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_{\rho^l} = I.$$

Этот предел не зависит от взятой нами последовательности  $\rho^i$ , удовлетворяющей условию (3), потому что, если допустить, что для некоторой последовательности  $\rho^{i'}$  имеет место

$$\lim_{i' \rightarrow \infty} S_{\rho^{i'}} = I_1 \neq I,$$

то последовательность разбиений

$$\rho^1, \rho^{i'}, \rho^2, \rho^{2'}, \rho^3, \dots$$

удовлетворяла бы условию (3), а ей соответствующая последовательность интегральных сумм

$$S_{\rho^1}, S_{\rho^{i'}}, S_{\rho^2}, S_{\rho^{2'}}, S_{\rho^3}, \dots$$

не стремилась бы к пределу, что противоречит уже доказанному неравенству (2).

Если  $m\Omega = 0$ , то интеграл от  $f$  на  $\Omega$ , очевидно, существует и равен нулю.

## § 2.6. Замена переменных.

### Простейший случай

Покажем, как видоизменяется интеграл

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2. \quad (1)$$

если в нем произвести замену переменных

$$\begin{aligned} x'_1 &= ax_1 + bx_2, \\ x'_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad \left( D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right). \quad (2)$$

Будем считать, что  $\Omega'$  — область с непрерывной кусочно-гладкой границей  $\Gamma'$  (рис. 39).

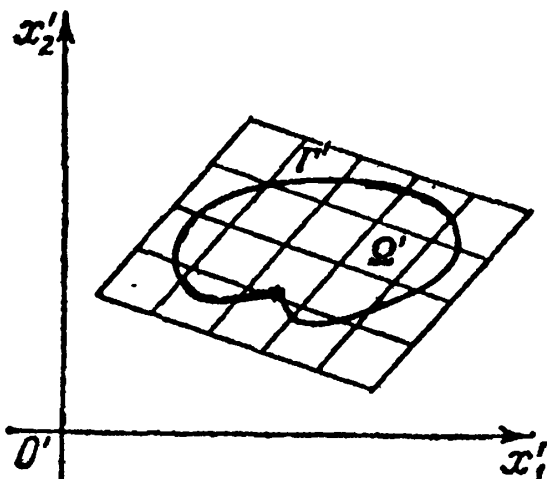


Рис. 39

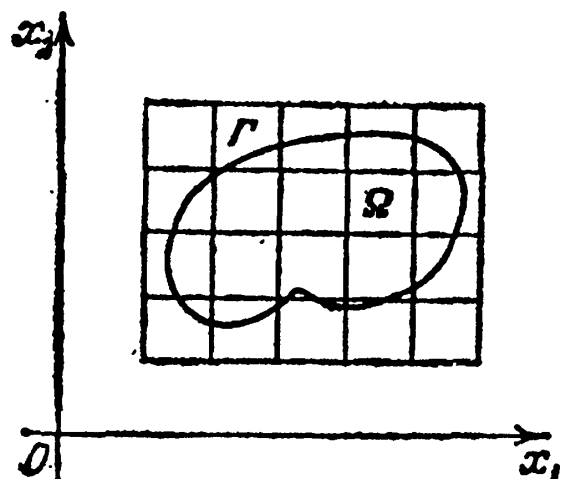


Рис. 40

Преобразование, обратное к (2), отображает  $\Omega'$  на некоторую область  $\Omega$  плоскости  $x_1, x_2$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  (рис. 40). При этом на  $\Omega$  определена функция

$$F(x_1, x_2) = f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \quad ((x_1, x_2) \in \Omega).$$

Введем в плоскости  $x_1, x_2$  прямоугольную сетку со сторонами квадратов  $\Delta$  длины  $h$ . Она отображается при помощи уравнений (2), вообще говоря, в косоугольную сетку, делящую плоскость  $x'_1, x'_2$  на равные параллелограммы  $\Delta'$  (образы  $\Delta$ ), имеющие площадь (пояснения ниже)

$$|\Delta'| = |D| |\Delta| = h^2 |D|. \quad (3)$$

Тем самым определены разбиения  $\rho, \rho'$  соответственно областей  $\Omega, \Omega'$ .

Поясним равенства (3) подробнее. Произвольный квадрат  $\Delta$  определяется двумя векторами  $(h, 0), (0, h)$ , которые будем считать выходящими из левой нижней вершины  $\Delta$ . Первый вектор (направленный отрезок) совпадает с основанием  $\Delta$ , а второй — с вертикальной стороной  $\Delta$ . Преобразование (2) отражает эти векторы соответственно в векторы  $(ah, ch), (bh, dh)$  — стороны параллелограмма  $\Delta'$ . Площадь  $\Delta'$ , как мы знаем<sup>1</sup>, равна

$$|\Delta'| = \left| \begin{vmatrix} ah & ch \\ bh & dh \end{vmatrix} \right| = h^2 |D|.$$

Имеем

$$S_{\rho'}(f) = \sum f(x'_1, x'_2) |\Delta'| = \sum F(x_1, x_2) |D| |\Delta| = S_{\rho}(|D|F) \quad (4)$$

$$((x_1, x_2) \in \Delta, (x'_1, x'_2) \in \Delta').$$

Мы считаем, что вторая сумма в этой цепи распространена только на полные квадраты  $\Delta \subset \Omega$ , соответственно — первая — на соответствующие им полные параллелограммы  $\Delta'$  (см. замечание 4 § 2.1). Переходя к пределу в (4) при  $h \rightarrow 0$ , получим формулу

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = \iint_{\Omega} F(x_1, x_2) |D| dx_1 dx_2 =$$

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 12.

$$= |D| \iint_{\Omega} F(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (5)$$

В этом рассуждении можно считать, что функция  $f$  непрерывна на  $\Omega'$  и тогда функция  $F$  будет непрерывной на  $\bar{\Omega}$ . Но этот результат остается верным и в случае, когда  $f$  ограничена на  $\Omega'$  и непрерывна всюду на  $\Omega'$ , исключая отдельные точки или кусочно-гладкие линии.

В следующем параграфе дается общая формула замены переменных в кратных интегралах.

## § 2.7. Замена переменных. Общий случай

Ограничимся сначала двумерным случаем. Зададим две функции

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varphi(x_1, x_2), \\ x'_2 &= \psi(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad ((x_1, x_2) \in \Omega), \quad (1)$$

имеющие непрерывные производные на замыкании  $\bar{\Omega}$  ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Будем считать, что преобразование (1) отображает  $\Omega$  на некоторую область  $\Omega'$  с кусочно-гладкой границей взаимно однозначно.

Зададим функцию  $f(x')$ , непрерывную на  $\bar{\Omega}'$  либо ограниченную на  $\Omega'$  и непрерывную всюду, исключая отдельные точки и кусочно-гладкие линии.

При этих условиях формула (5) § 2.6 замены переменных в кратном интеграле сохраняется, но роль определителя  $D$  теперь уже играет определитель Якоби<sup>1</sup>

$$D(x) = \frac{D(x'_1, x'_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix};$$

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = \iint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)] |D(x)| dx_1 dx_2. \quad (2)$$

<sup>1</sup> К. Г. Я. Якоби (1804–1851) – крупный немецкий математик и механик.

Определитель  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ , о котором шла речь в § 2.6, тоже можно рассматривать как якобиан линейной системы

$$x'_1 = ax_1 + bx_2, \quad x'_2 = cx_1 + dx_2.$$

В трехмерном случае формула замены переменных в кратном интеграле выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \\ & = \iiint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2, x_3), \psi(x_1, x_2, x_3), \chi(x_1, x_2, x_3)] \times \\ & \quad \times |D(x)| dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ x'_2 &= \psi(x_1, x_2, x_3), \\ x'_3 &= \chi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} \quad ((x_1, x_2, x_3) \in \Omega), \quad (4)$$

— непрерывно дифференцируемые функции на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей и

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что область  $\Omega$  отображается на  $\Omega'$  при помощи (4) взаимно однозначно. По-прежнему предполагается, что  $f(x')$  непрерывна на  $\bar{\Omega}'$  или ограничена на  $\Omega'$  и непрерывна на  $\Omega'$ , исключая конечное число точек, кусочно-гладких линий и кусочно-гладких поверхностей.

На рис. 41, 42 изображены области  $\Omega$  и  $\Omega'$  в плоскостях, соответственно  $x_1, x_2$  и  $x'_1, x'_2$ . Прямоугольная сетка, делящая

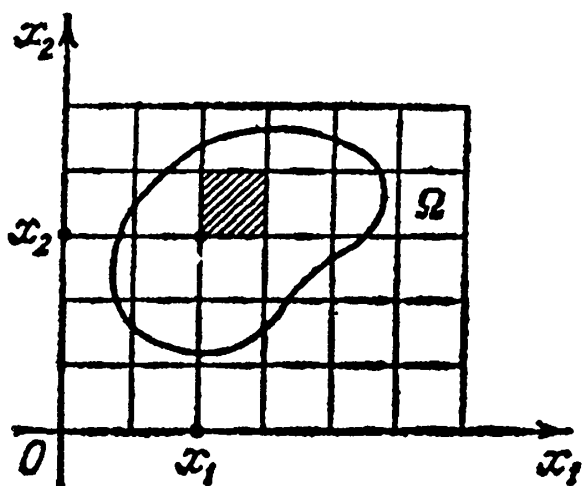


Рис. 41

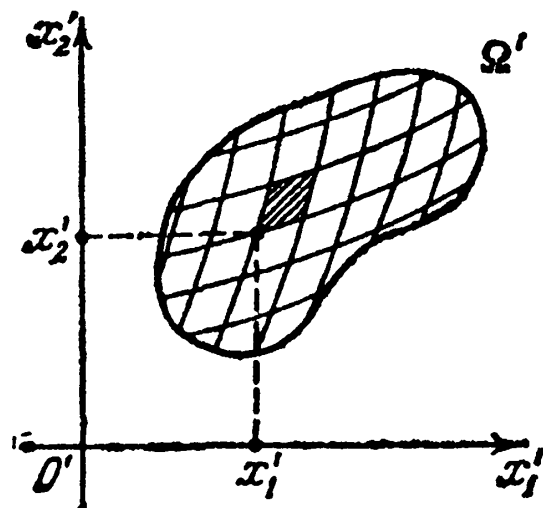


Рис. 42

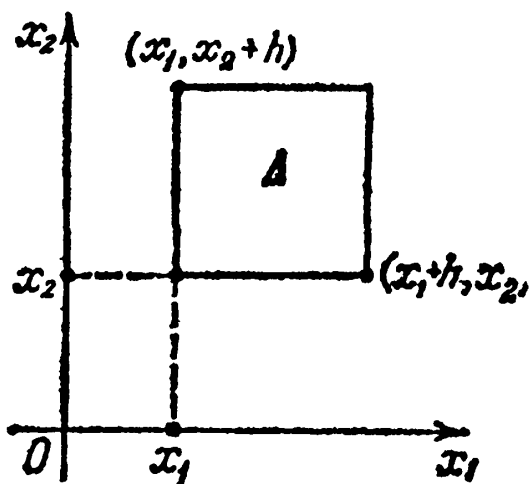


Рис. 43

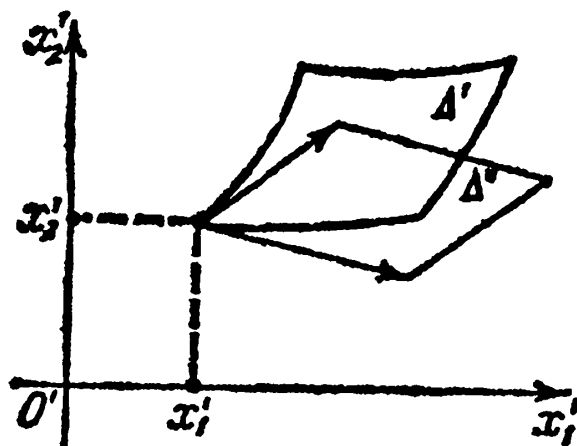


Рис. 44

плоскость  $x_1, x_2$  на квадраты  $\Delta$  со стороной длины  $h$ , переходит в криволинейную сетку, делящую  $\Omega'$  на криволинейные параллелограммы  $\Delta'$ .

Рассмотрим произвольный квадрат  $\Delta \subset \Omega$  (рис. 43). Он отображается при помощи преобразований (1) на криволинейный параллелограмм  $\Delta'$  (рис. 44). Из вершины  $\Delta'$ , имеющей координаты  $(x'_1, x'_2)$ , выпущены векторы, касательные к «сторонам»  $\Delta'$ :

$$\left( h \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, h \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \left( h \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, h \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)$$

(угловым коэффициентом касательной к кривой  $\begin{cases} x'_1 = \varphi(x_1, x_2), \\ x'_2 = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$ )

при фиксированном  $x_2$  равен  $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ ). Эти векторы заменя-



ют соответствующие «стороны» с точностью до бесконечно малых высшего порядка (при  $h \rightarrow 0$ ). Параллелограмм  $\Delta''$ , построенный на этих векторах, имеет точно вычисляемую площадь

$$|\Delta''| = h^2 \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| \frac{D(x'_1, x'_2)}{D(x_1, x_2)} \right| = h^2 |D(x)|.$$

Можно аккуратно показать, что площадь (двумерная мера) криволинейного параллелограмма  $\Delta'$  имеет вид

$$|\Delta'| = (|D(x)| + \varepsilon_\Delta) h^2,$$

где величина  $\varepsilon_\Delta$  стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$  и притом равномерно для всех квадратиков  $\Delta$ . Для каждого квадрата  $\Delta$  величина  $\varepsilon_\Delta$  зависит от  $\Delta$  и стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Равномерность стремления проявляется в том, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что

$$|\varepsilon_\Delta| < \varepsilon, \quad \forall \Delta \text{ с } h < \delta.$$

Рассмотрим интегральную сумму функций  $f(x')$ , соответствующую разбиению  $\Omega'$ , как на рис. 42. При этом мы берем сумму по «полным»  $\Delta'$ , т. е. таким, которые соответствуют квадратам  $\Delta$ , полностью принадлежащим к  $\Omega$  ( $\Delta \subset \Omega$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \sum' f(x') |\Delta'| &= \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] [ |D(x)| + \varepsilon_\Delta ] h^2 = \\ &= \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| h^2 + r_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| dx. \end{aligned}$$

Здесь  $x'$  — произвольная точка, принадлежащая к  $\Delta'$  ( $x' \in \Delta'$ ), а  $x$  — соответствующая ей при помощи (1) точка, очевидно,

принадлежащая к  $\Delta$  ( $x \in \Delta$ ). Знак  $\sum'$  обозначает, что сумма распространена на полные квадраты  $\Delta$  ( $\Delta \subset \Omega$ ). Далее

$$|r_n| = \left| \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] \varepsilon_\Delta h^2 \right| \leq M \varepsilon \sum' h^2 \leq M \cdot \varepsilon m \Omega$$

$$(M \geq |f[\varphi(x), \psi(x)]|),$$

откуда видно, что

$$r_n \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0.$$

Итак, формула (2) доказана.

### § 2.8. Полярная система координат в плоскости

Луч, выходящий из заданной точки  $O$ , называют *полярной осью*, а точку  $O$  *полюсом* полярной системы координат (рис. 45). Произвольная точка  $A$  плоскости имеет полярные координаты  $(\rho, \theta)$ , где  $\rho$  – расстояние от  $A$  до  $O$ , а  $\theta$  – угол между векторами (направленным отрезком)  $\overrightarrow{OA}$  и полярной осью, отсчитываемый от последней против часовой стрелки.

Введем прямоугольную систему координат  $x, y$ , у которой положительная ось  $x$  совпадает с полярной осью (рис. 46).

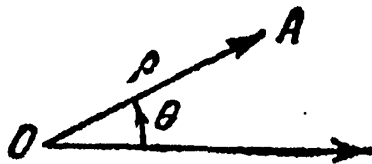


Рис. 45

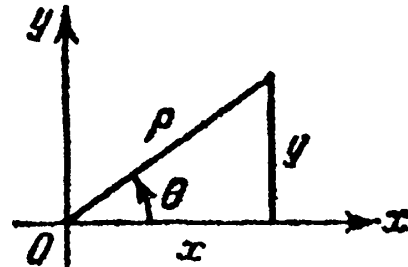


Рис. 46

#### Система уравнений

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (1)$$

осуществляет преобразование полярных координат в декартовые (прямоугольные). Правые части в равенствах (1) – непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0. \quad (2)$$

#### Уравнение

$$\rho = \psi(\theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2),$$

где  $\psi(\theta)$  – непрерывная на отрезке  $[\theta_1, \theta_2]$  функция, определяет в полярных координатах кривую  $\Gamma$  – геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Будем считать, что  $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ . Тогда кривая  $\Gamma$  такова, что любой луч, выходящий из полюса  $O$  под уг-

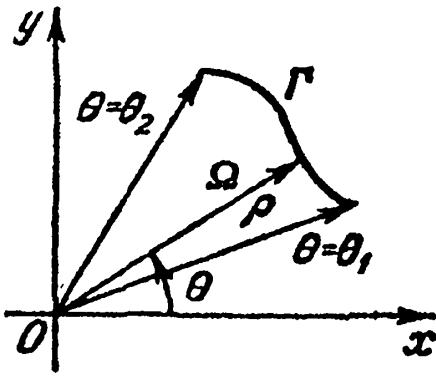


Рис. 47

лом  $\theta$  к оси  $x$ , где  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , пересекает  $\Gamma$  в одной точке (рис. 47).

Зададим в плоскости  $x, y$  область  $\Omega$ , ограниченную лучами  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  и кривой  $\Gamma$ . При высказанных условиях любая точка  $(x, y) \in \Omega$  соответствует при помощи уравнений (1) только одной паре  $(\rho, \theta)$ , где  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . Пусть теперь на замыкании  $\bar{\Omega}$  нашей области  $\Omega$  задана непрерывная функция  $f(x, y)$  от  $(x, y)$  или она может

быть ограниченной на  $\Omega$  и непрерывной всюду, исключая отдельные точки и гладкие линии. Тогда имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \quad (3)$$

Согласно формуле (2) § 2.7 мы заменили  $x, y$  через  $\rho, \theta$  посредством равенства (1) и ввели в качестве множителя абсолютную величину якобиана  $|\rho| = \rho$ . Для области  $\Omega'$  пар  $(\rho, \theta)$ , соответствующей исходной области  $\Omega$ , сразу же расставлены пределы — сначала интегрируем по  $\rho$  от 0 до  $\psi(\theta)$ , а затем по  $\theta$  от  $\theta_1$  до  $\theta_2$ .

Пример 1.

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \exp(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \exp \rho^2 \cdot \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^R \exp \rho^2 d(\rho^2) = (u = \rho^2) \pi \int_0^{R^2} e^u du = \pi [e^{R^2} - 1]. \end{aligned}$$

Мы следовали формуле (3). Надо учесть, что область, определяемая в декартовых координатах неравенством  $x^2 + y^2 < R^2$ , в полярных координатах определяется неравенством  $\rho < R$ .

Формулу (3) можно получить из естественных соображений, не прибегая к общей формуле (2) § 2.7.

Плоскость  $x, y$  разбиваем на элементарные фигуры близкими концентрическими окружностями и выходящи-

ми из полюса полярной системы лучами (рис. 48). Площадь произвольной элементарной фигуры (возле точки  $(\rho, \theta)$ ) или, как говорят, элемент площади в полярных координатах, равна с точностью до бесконечно малых высшего порядка  $\Delta s \sim \rho d\rho d\theta$  (заштрихованная фигура на рис. 48 может быть приближенно принята за прямоугольник со сторонами  $d\rho$  и  $\rho d\theta$ ). Поэтому, если просуммировать по этим элементам, то получим

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \rightarrow 0} \sum F_j \rho_j \Delta\rho_j \Delta\theta_j = \iint_{\Omega'} F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta,$$

где

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$I = \iint_{\pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам (рис. 49), получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \rho \cdot \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \rho \sin \rho d\rho = (\rho = u, \sin \rho d\rho = dv) = \\ &= 2\pi \left[ -\rho \cos \rho \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \rho d\rho \right] = -6\pi^2 + 2\pi \sin \rho \Big|_{\pi}^{2\pi} = -6\pi^2. \end{aligned}$$

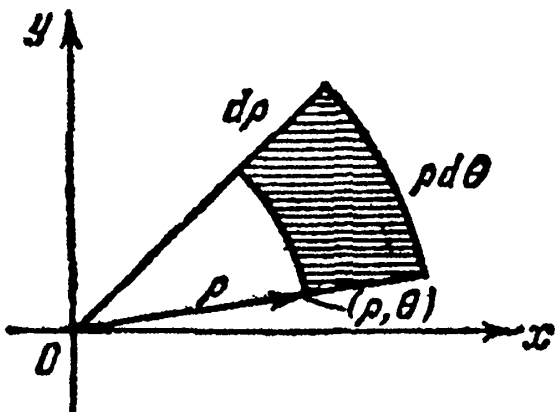


Рис. 48

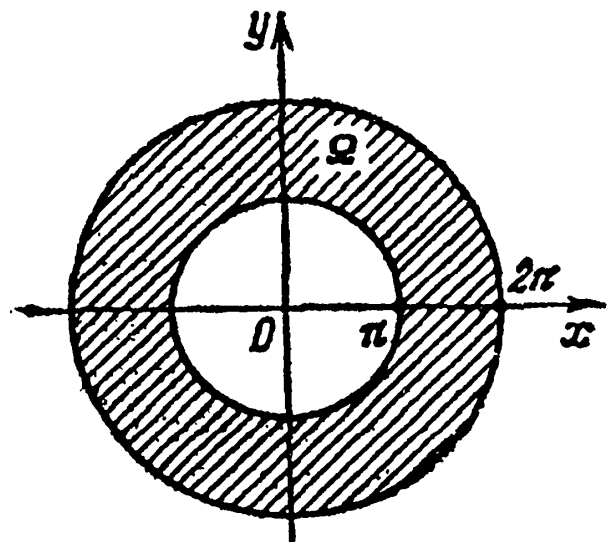


Рис. 49

## § 2.9. Полярная система координат в пространстве

Система уравнений

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \sin\theta \quad (1)$$

осуществляет переход от *полярных (сферических) координат* в пространстве к декартовым (рис. 50). Здесь  $\rho$  – расстояние точки  $P(x, y, z)$  до начала координат (полюса полярной системы),  $\theta$  – угол между радиус-вектором  $\rho$  точки  $P$  и его проекцией на плоскость  $x, y$ ,  $\varphi$  – угол между указанной проекцией и положительным направлением оси  $x$ . Его отсчитывают в том направлении, в котором надо вращать вокруг оси  $z$  ось  $x$ , чтобы прийти к оси  $y$  кратчайшим путем. Можно считать, что  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Функции справа в (1) непрерывно дифференцируемы с якобианом

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\varphi & -\rho \cos\theta \sin\varphi & -\rho \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi & \rho \cos\theta \cos\varphi & -\rho \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho \cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2 \cos\theta. \quad (2)$$

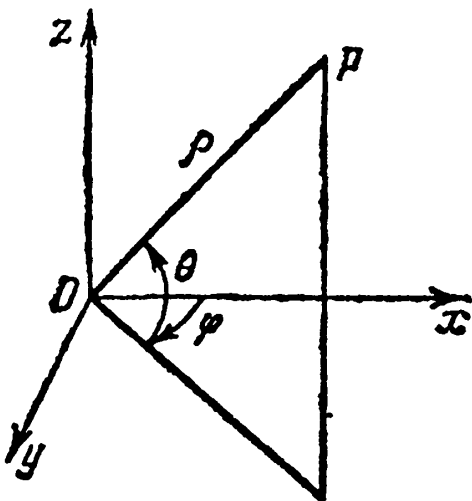


Рис. 50

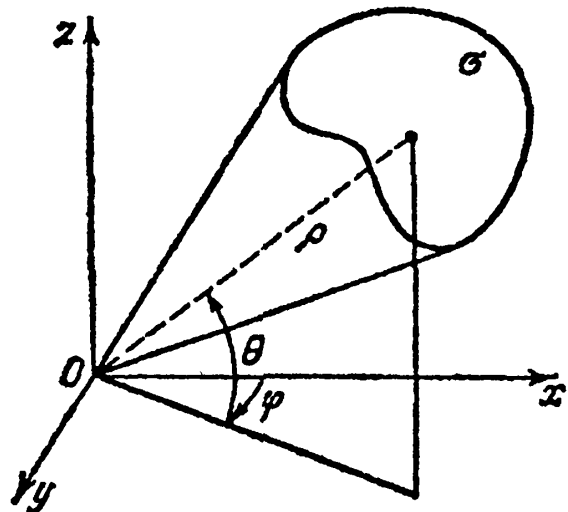


Рис. 51

Пусть  $\sigma$  есть поверхность, описываемая в полярных координатах функцией  $\rho = \psi(\theta, \varphi)$  ( $(\theta, \varphi) \in \omega$ ), непрерывной на замыкании области  $\omega$  и пусть  $\Omega$  — трехмерная область пространства  $(x, y, z)$ , ограниченная поверхностью  $\sigma$  и конической поверхностью, лучи которой выходят из нулевой точки и опираются на край  $\sigma$  (рис. 51). Тогда для непрерывной на  $\Omega$  функции  $f(x, y, z)$  имеет место равенство

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\omega} d\theta d\varphi \int_0^{\psi(\theta, \varphi)} F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \cos \theta d\rho, \quad (3)$$

где  $F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta)$ .

Мы воспользовались общей формулой (3) § 2.7, учитывая равенство (1) и (2). В данном случае  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , поэтому  $\rho^2 \cos \theta \geq 0$ .

Чтобы наглядно получить элемент объема в полярных координатах, разрежем пространство на малые части концентрическими шаровыми поверхностями с центром в полярном полюсе (точке  $\rho = 0$ ), плоскостями, проходящими через ось  $z$ , и коническими поверхностями, определяемыми углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  (рис. 52), имеющими своей осью ось  $z$ . Легко видеть, что полученные при этом малые ячей-

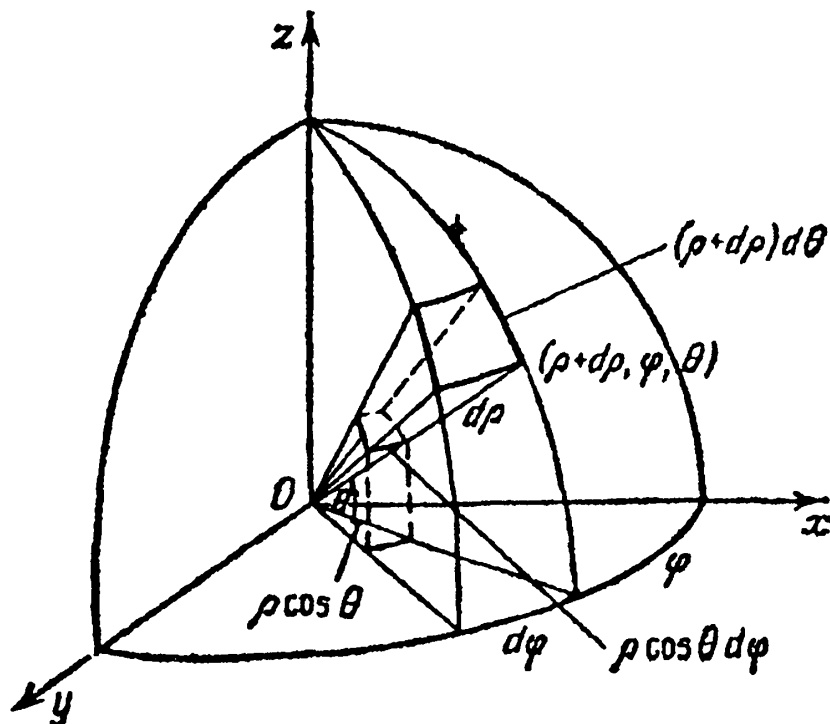


Рис. 52

ки можно считать приближенно прямоугольными параллелепипедами с ребрами  $\rho d\theta$ ,  $d\rho$ ,  $\rho \cos\theta d\varphi$ , поэтому их объем, с точностью до бесконечно малых высшего порядка,

$$\Delta v = \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta d\varphi,$$

где  $(\rho, \theta, \varphi)$  — одна из точек ячейки.

**Пример.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz,$$

где  $\Omega$  — область точек с положительными координатами, ограниченная поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Введем полярные (сферические) координаты по формулам (1), тогда для области  $\Omega$ :  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^5 \cos^3 \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos \varphi d \cos \varphi \int_0^{\pi/2} -\cos^3 \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho = \\ &= -\frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \left( -\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

## § 2.10. Цилиндрические координаты

Зададим в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат  $x, y, z$ . Произвольная точка  $A = (x, y, z)$  пространства определяется также тройкой чисел  $(\rho, \theta, z)$ , где  $z$  — по-прежнему ее аппликата, а  $(\rho, \theta)$  — полярные координаты точки  $(x, y)$  плоскости  $xOy$  в предположении, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси  $x$  (рис. 53).

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Якобиан этого преобразования

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0. \quad (2)$$

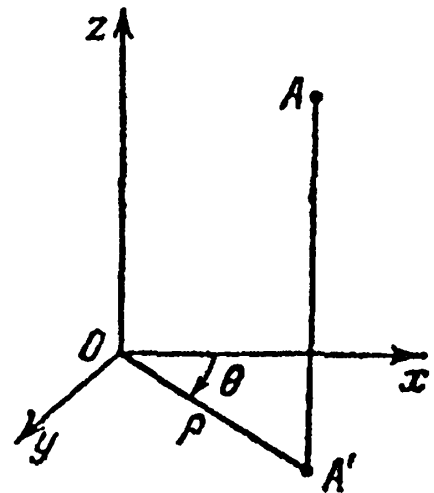


Рис. 53

Формула замены переменных в этом случае записывается так:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f[\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z] \rho d\rho d\theta dz.$$

Чтобы наглядно получить элемент объема в цилиндрических координатах, разрежем пространство концентрическими цилиндрическими круговыми поверхностями, имеющими ось ось  $z$ , плоскостями, проходящими через ось  $z$ , и плоскостями, параллельными плоскости  $xOy$  (рис. 54). Элемент пространства, ограниченный этими поверхностями-

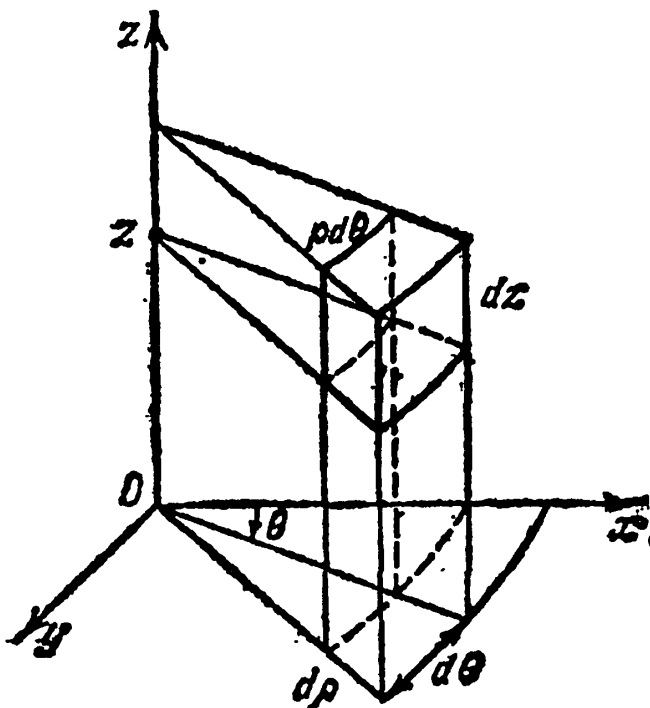


Рис. 54

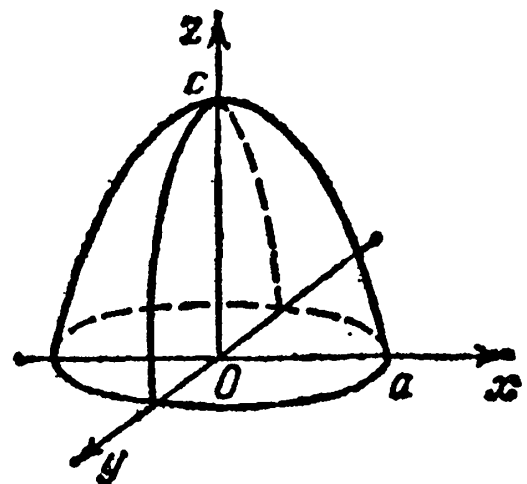


Рис. 55



ми, с точностью до малых высшего порядка, представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами  $d\rho$ ,  $dz$ ,  $\rho d\theta$ . Его объем равен  $\rho d\rho d\theta dz$ .

**Пример.** Найти объем тела  $\Omega$ , ограниченного поверхностями

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad z = 0 \quad (a, c > 0) \quad (\text{рис. 55}).$$

Как нам известно,

$$V = m\Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Вводя цилиндрические координаты (1) получаем

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega'} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta \int_0^{c\left[1 - \frac{\rho^4}{a^4}\right]} dz = \\ &= 2\pi c \int_0^a \rho \left(1 - \frac{\rho^4}{a^4}\right) d\rho = \frac{2}{3} \pi a^2 c. \end{aligned}$$

## § 2.11. Площадь поверхности

Зададим в трехмерном пространстве  $R = R_3$ , где определена прямоугольная система координат  $x, y, z$ , поверхность  $S$ , описываемую уравнением

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{G}). \quad (1)$$

Мы предполагаем, что  $G$  есть открытая ограниченная область плоскости  $x, y$  с кусочно-гладкой границей, а функция  $f$  имеет непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

на  $\bar{G}$ . Разрежем  $\bar{G}$  на части, пересекающиеся попарно разве что по своим (кусочно-гладким) границам

$$\bar{G} = \sum_{j=1}^N G_j.$$

Пусть  $(x_j, y_j)$  – произвольная точка  $G_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Ей соответствует точка  $P_j \in S$  с координатами  $x_j, y_j, f_j$ , где  $f_j = f(x_j, y_j)$ . В точке  $P_j$  проведем плоскость  $L_j$ , касательную к  $S$ . Построим на границе  $G_j$  как на направляющей цилиндрическую поверхность  $\Gamma_j$  с образующей, параллельной оси  $z$ . Она вырежет в касательной плоскости  $L_j$  кусок  $l_j$ . Площадь его обозначим через  $|l_j|$ .

По определению *площадью поверхности  $S$*  называется предел

$$|S| = \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |l_j|.$$

Косинус острого угла нормали  $n_j$  к  $S$  в точке  $P_j$  с осью  $z$  равен

$$\cos(n_j, z) = 1 / \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2},$$

где квадратный корень взят со знаком  $+$ , а  $p_j, q_j$  обозначают результаты подстановки в  $p, q$  значений  $x_j, y_j$ . Ведь уравнение касательной плоскости имеет вид<sup>1</sup>

$$(Z - z_j) - p_j (X - x_j) - q_j (Y - y_j) = 0$$

и, следовательно, нормаль к ней определяется вектором  $(-p_j, -q_j, 1)$ . Очевидно, что  $G_j$  есть проекция  $l_j$  на плоскость  $x, y$  и, следовательно, площадь (двумерная мера)  $G_j$  равна

$$|G_j| = |l_j| \cos(n_j, z),$$

$$|l_j| = |G_j| \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$$

и

$$|S| = \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |l_j| = \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2} |G_j| =$$

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 8.7, 8.8.

$$= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy ,$$

так как функция  $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$  непрерывна на  $\bar{G}$ , а следовательно, интегрируема.

Мы доказали, что площадь поверхности  $S$ , описываемой уравнением (1), выражается по формуле

$$|S| = \iint_G \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx dy . \quad (3)$$

Конечно, если поверхность  $S$  задана при помощи функции

$$x = F(y, z) \quad ((y, z) \in H), \quad (1')$$

явно выражающей зависимость  $x$  от  $y, z$ , то

$$|S| = \iint_H \sqrt{1 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} \, dy dz , \quad (3')$$

а если  $S$  задана функцией

$$y = \Phi(x, z) \quad ((x, z) \in \Lambda), \quad (1'')$$

то

$$|S| = \iint_A \sqrt{1 + (\Phi'_x)^2 + (\Phi'_z)^2} \, dx dz . \quad (3'')$$

**Пример 1.** Вычислить площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , заключенной внутри кругового цилиндра  $x^2 + y^2 = b^2$ , ( $b \leq a$ ).

В данном случае  $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Пусть  $G_b$  есть четверть круга радиуса  $b$  с центром в начале координат (рис. 56). Согласно (3), учитывая симметрию, находим

$$|S_b| = 8 \iint_{G_b} \sqrt{1 + \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} \, dx dy =$$

$$= 8 \iint_{G_b} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \int_0^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$= 2\pi a [-2(a^2 - \rho^2)^{1/2}]_0^b = 4\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

При  $b = a$  интегралы в этой цепи надо понимать в несобственном смысле (см. далее § 2.13).

Преобразуем интеграл (3), сделав в нем подстановку

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}), \quad (4)$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие области  $\Omega$  и  $G$ , в предположении, что  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывно дифференцируемы на  $\bar{\Omega}$  и якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (1) выражения  $x$  и  $y$  из (4), получим

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \chi(u, v).$$

Тогда

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Решая эти уравнения относительно  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$  и учитывая (5), получим

$$p = - \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \bigg/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad q = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \bigg/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

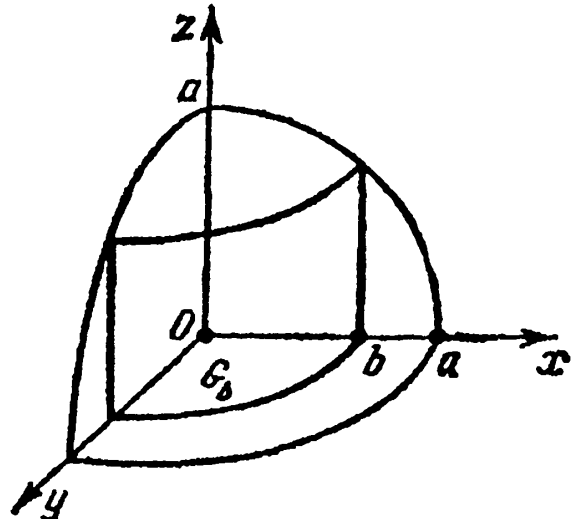


Рис. 56

Поэтому, применив к интегралу (3) формулу о замене переменных (2) § 2.7., получим

$$\begin{aligned}
 |S| &= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = \\
 &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} / \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} / \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2} \times \\
 &\quad \times \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, dudv. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Таким образом, площадь поверхности  $S$  выражается также формулой

$$|S| = \iint_{\Omega} \sqrt{\left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2} \, dudv. \quad (7)$$

Гладкую поверхность  $S$  можно задать параметрически — при помощи трех уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega), \quad (8)$$

где функции  $x, y, z$  имеют непрерывные частные производные на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  значений  $(u, v)$ , называемых параметрами  $S$ . При этом предполагается, что ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \quad (9)$$

равен 2 для всех точек  $(u, v) \in \Omega$ . Это показывает, что имеет место неравенство

$$\left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2 > 0 \quad (\forall (u, v) \in \Omega). \quad (10)$$

В самом деле, это неравенство выражает тот факт, что для любого  $(u, v) \in \Omega$  по крайней мере один из членов суммы в левой части (10) не равен нулю. Таким образом, один из определителей второго порядка, порождаемых матрицей (9), не равен нулю.

Отметим, что три уравнения (8) поверхности  $S$  можно записать в векторной форме

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (11)$$

где, таким образом, вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  (радиус-вектор точки поверхности  $S$ ) зависит от двух скалярных параметров  $u$  и  $v$ .

Дифференцируя равенство (11) по  $u$  и по  $v$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}, \\ \dot{\mathbf{r}}_v &= \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Векторное произведение этих двух векторов есть

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{k} = \mathbf{i} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \mathbf{j} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \mathbf{k} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \quad (13) \end{aligned}$$

Квадрат длины вектора  $\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v$  оказывается равен левой части (10):

$$|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|^2 = \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2.$$

Уравнения

$$x = \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \sin \theta$$

определяют сферу радиуса 1 с центром в нулевой точке ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ). Мы видим, что всю сферу можно задать

в параметрическом виде единичными уравнениями. В явном виде, т. е. в одном из видов (1), (1'), (1''), сферу в целом, очевидно, задать нельзя. Только отдельные куски сферы, если они проектируются однозначно на ту или иную координатную плоскость, возможно описать в явном виде.

С другой стороны, поверхность  $S$ , заданную параметрически при помощи уравнений (8), всегда можно выразить явно, но только локально. В самом деле, зададим какую-либо точку  $A \in S$ , соответствующую параметрам  $(u_0, v_0)$ . В силу условия (10) в этой точке одно из слагаемых левой части (10) больше нуля, пусть первое. Но тогда в окрестности  $(u_0, v_0)$  можно решить первые два уравнения (8) относительно  $u$  и  $v$  и получить

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y).$$

Подставив эти функции в третье уравнение (8), получим, что некоторый кусок  $\sigma$  поверхности  $S$ , содержащий в себе точку  $A$ , описывается явно уравнением вида

$$z = f(x, y).$$

Мы видим, что параметрическое задание поверхности является, вообще говоря, более общим, чем явное.

Если поверхность  $S$  задана параметрически уравнениями (8), то *по определению ее площадью* называется число, равное

$$|S| = \iint_{\Omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv. \quad (14)$$

Заметим, что всякой области  $\omega$ , принадлежащей к  $\Omega$ , соответствует при помощи уравнений (8) некоторая поверхность  $\sigma \subset S$ . Это кусок поверхности  $S$ . Согласно определению (14) площадь  $\sigma$  равна

$$|\sigma| = \iint_{\omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv. \quad (15)$$

Ясно, что если  $\sigma$  разрезать на два куска  $\sigma_1, \sigma_2$ , соответствующие областям  $\omega_1, \omega_2$  ( $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ ), то

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \iint_{\omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv = \iint_{\omega_1} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv + \iint_{\omega_2} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv = \\ &= |\sigma_1| + |\sigma_2|. \end{aligned}$$

Это показывает, что определение (14) обладает естественным свойством – площадь куска  $\sigma$  поверхности  $S$  равна сумме площадей кусков  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на которые он разрезан.

Подчеркнем также, что если определение (14) площади  $|\sigma|$  применить к куску  $\sigma$ , проектируемому однозначно на ту или иную координатную плоскость, то оно эквивалентно исходному определению площади такого куска ((3), (3') или (3'')). Это было доказано выше (см. (6)).

**Пример 2.** Найти площадь поверхности, заданной параметрически:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = b\varphi \quad (0 < r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Данную поверхность называют *геликоидом*. Вычислим якобианы:

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r, \quad \frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \cos \varphi,$$

$$\frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & r \cos \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \sin \varphi.$$

Далее,

$$\left[ \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} \right]^2 + \left[ \frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} \right]^2 + \left[ \frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)} \right]^2 = r^2 + b^2.$$

Поэтому на основании формулы (14) имеем

$$\begin{aligned} |S| &= \iint_{\Omega} \sqrt{r^2 + b^2} \, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2 + b^2} \, dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^a \sqrt{r^2 + b^2} \, dr = 2\pi \left[ \frac{r}{2} \sqrt{r^2 + b^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]_0^a = \end{aligned}$$



$$= \pi \left[ a\sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right].$$

## § 2.12. Координаты центра масс

В пространстве, где введена прямоугольная система координат, пусть задана материальная точка  $P = (x_1, x_2, x_3)$  с массой  $M_P$ . *Статическим моментом* этой точки относительно плоскости  $x_i = 0$  называется произведение  $M_P x_i$  и обозначается символом

$$K_{x_i} = M_P x_i.$$

Статический момент относительно плоскости  $x_i = 0$  конечной системы материальных точек  $P_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$  с массами  $M_j$  определяется равенством

$$K_{x_i} = \sum_j M_j x_i^{(j)}.$$

Наконец, если масса распределена по некоторому множеству  $G$ , то *статический момент тела  $G$*  относительно плоскости  $x_i = 0$  определяется как интеграл

$$K_{x_i} = \int_G \rho(P) x_i dG = \int_G \rho(P) x_i dx_1 dx_2 dx_3,$$

где  $\rho(P)$  — плотность распределения массы.

Центр тяжести  $P^c$  тела  $G$  имеет координаты  $(x_1^c, x_2^c, x_3^c)$ , определяемые равенствами

$$x_i^c = \int_G x_i \rho(P) dG \bigg/ \int_G \rho(P) dG \quad (i = 1, 2, 3).$$

В частности, если  $n = 2$  и  $G$  есть криволинейная трапеция в плоскости  $x_1, x_2$ , ограниченная сверху графиком функции  $x_2 = f(x_1)$  и снизу осью  $x_1$ , равномерно заполненная массами с плотностью  $\rho \equiv 1$ , то (рис. 57)

$$x_2^c = \frac{\int_G x_2 dx_1 dx_2}{\int_G dx_1 dx_2} = \frac{\int_a^b dx_1 \int_0^{f(x_1)} x_2 dx_2}{mG} = \frac{1}{2mG} \int_a^b f^2(x_1) dx_1.$$

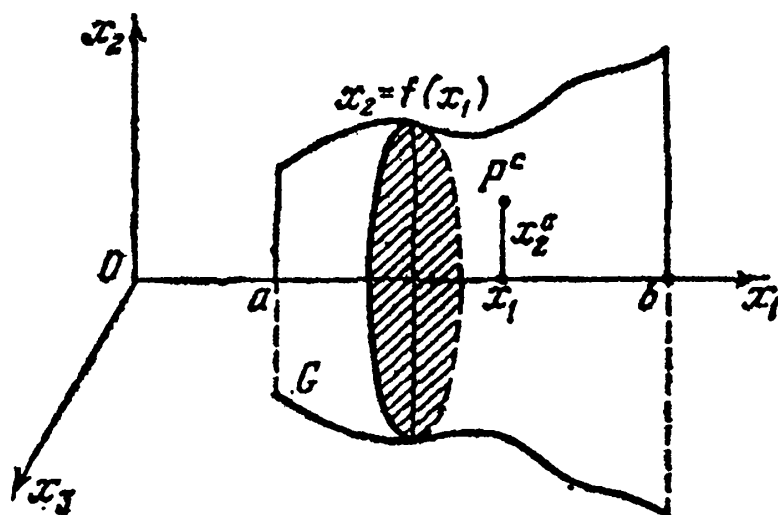


Рис. 57

Ведь 
$$\int_0^{f(x_1)} x_2 dx_2 = \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{f(x_1)} = \frac{f(x_1)^2}{2}.$$

Отсюда

$$2\pi x_2^c \cdot mG = \pi \int_a^b f^2(x_1) dx_1. \quad (1)$$

В правой части (1) стоит объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции  $G$  около оси  $x_1$ .

Таким образом, мы получили известную теорему Гюльдина<sup>1</sup>: *объем тела вращения криволинейной трапеции  $G$  равен ее площади, умноженной на длину окружности, описываемой центром масс (тяжести) этой трапеции около оси  $x_1$ .*

Если  $G$  есть однородная ( $\rho \equiv 1$ ) кривая  $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ , то

$$x_2^c = \frac{\int x_2 dl}{mG} = \frac{\int f(x_1) dl}{mG},$$

<sup>1</sup> П. Гюльдин (1557–1643) – швейцарский математик.

где  $mG$  – длина кривой в пределах  $[a, b]$ ,  $dl$  – элемент длины дуги. Так как  $dl = \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1$ , то

$$x_2^c = \frac{1}{mG} \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1$$

или

$$2\pi x_2^c \cdot mG = 2\pi \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1. \quad (2)$$

В правой части (2) стоит площадь поверхности вращения кривой  $G$  ( $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ ) около оси  $x_1$ . Таким образом, равенство (2) дает другую теорему Гюльдина: *площадь поверхности вращения кривой  $G$  ( $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ ), равна длине ее дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром масс этой дуги около оси  $x_1$ .*

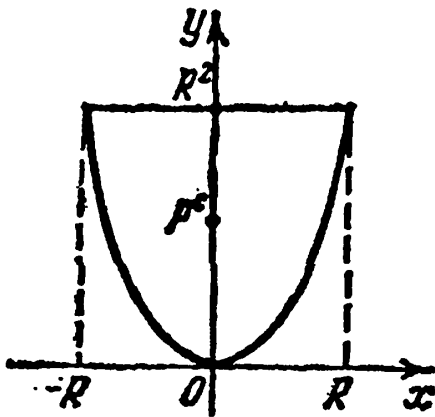


Рис. 58

Теоремы Гюльдина позволяют по двум известным величинам находить третью. Например, если известны координаты центра тяжести и объем тела вращения, то можно определить площадь криволинейной трапеции и т. д.

**Пример 1.** Найти координаты центра тяжести криволинейной трапеции  $G = \{-R \leq x \leq R, x^2 \leq y \leq R^2\}$  (рис. 58).

Пусть  $P^c = (x^c, y^c)$  – центр тяжести. В силу симметрии ясно, что  $x^c = 0$  (мы считаем  $\rho \equiv 1$ ). Найдем площадь трапеции  $G$ :

$$mG = R^2 \cdot 2R - 2 \int_0^R x^2 dx = 2R^3 - \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3} R^3.$$

Объем тела, полученного от вращения  $G$  около оси  $x$ , равен

$$V = 2R \cdot \pi R^4 - 2\pi \int_0^R (x^2)^2 dx = 2\pi R^5 - \frac{2}{5} \pi R^5 = \frac{8}{5} \pi R^5.$$

На основании первой теоремы Гюльдина

$$y^c = \frac{V}{2\pi mG} = \frac{3}{5} R^2.$$

**Пример 2.** Найти объем тела, полученного от вращения круга  $G = \{x^2 + (y - a)^2 \leq r^2\}$  с центром в точке  $(0, a)$ , радиуса  $r$  ( $r < a$ ), около оси  $x$  (рис. 59).

Ясно, что центр тяжести круга (однородного) совпадает с его геометрическим центром, т. е.  $x^c = 0$ ,  $y^c = a$ . Площадь круга  $mG = \pi r^2$ . Поэтому по первой теореме Гюльдина

$$V = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a.$$

**Пример 3.** Найти площадь поверхности тела вращения, рассмотренного в примере 2.

Данную поверхность можно рассматривать как поверхность, полученную от вращения окружности  $x^2 + (y - a)^2 = r^2$  около оси  $x$ . Длина этой окружности равна  $2\pi r$ . Поэтому по второй теореме Гюльдина

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 2\pi^2 ar$$

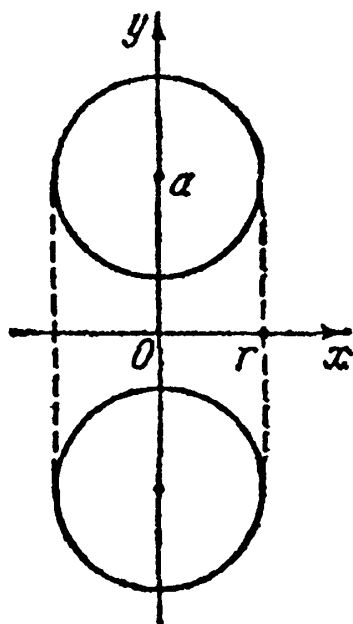


Рис. 59

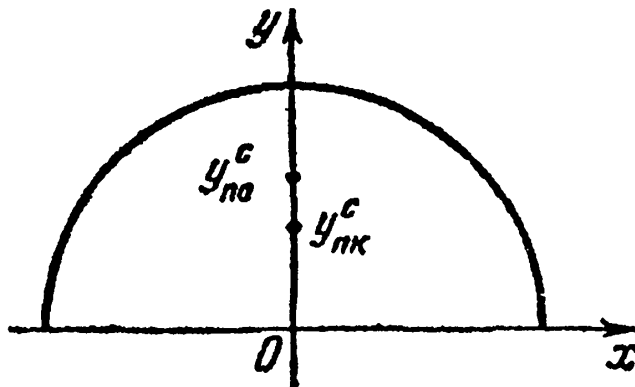


Рис. 60

(центр тяжести однородной окружности также совпадает с центром  $(0, a)$  этой окружности).

**Пример 4.** Найти центр тяжести однородного ( $\rho \equiv 1$ ) полукруга  $x^2 + y^2 \leq R^2, y > 0$ ; полуокружности  $x^2 + y^2 = R^2, y > 0$ .

Известно, что объем шара радиуса  $R$  равен  $\frac{4}{3}\pi R^3$ , а площадь поверхности шара равна  $4\pi R^2$ . По формуле (1) получаем (рис. 60)

$$2\pi y_{\text{пк}}^c \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad y_{\text{пк}}^c = \frac{4R}{3\pi},$$

где  $y_{\text{пк}}^c$  — ордината центра тяжести полукруга.

По формуле (2) для ординаты  $y_{\text{по}}^c$  центра тяжести полуокружности имеем

$$2\pi y_{\text{по}}^c \cdot \pi R = 4\pi R^2, \quad y_{\text{по}}^c = \frac{2R}{\pi}.$$

**Моменты.** Моментом  $q$ -го порядка ( $q = 2, 3, \dots$ ) материальной точки  $P$  с массой  $M_P$  относительно плоскости  $x_i = 0$  называется произведение

$$I_{x_i}^{(q)} = M_P x_i^q.$$

Если массы распределены по измеримому множеству  $G$  с плотностью  $\rho(P)$ , то

$$I_{x_i}^{(q)} = \int_G x_i^q \rho(P) dG \quad (i = 1, 2, 3).$$

Если  $q = 2$ , то соответствующий момент второго порядка называется *моментом инерции*.

Кроме того, можно рассматривать моменты  $q$ -го порядка тела  $G$  относительно начала координат

$$I_0^{(q)} = \int_G \rho(P) \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{q/2} dG;$$

относительно оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Например, момент  $q$ -го порядка относительно оси  $x_1$  запишется

$$I_{x_2 x_3}^{(q)} = \int_G \rho(P) (x_2^2 + x_3^2)^{q/2} dG.$$

### § 2.13. Несобственные интегралы<sup>1</sup>

Пусть функция  $u = f(x)$  задана в замкнутой области  $\bar{G}$  ( $\bar{G} = G \cup dG$ ). Точка  $x^0 \in G$  называется *особой точкой* функции, если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x^0$  функция неограничена. Пусть (рис. 61)  $G_\varepsilon = G \setminus U(x^0, \varepsilon)$ , где  $U(x^0, \varepsilon)$  — открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x^0$  ( $\rho(x, x^0) = |x - x^0| < \varepsilon$ ).

Если функция  $f(x)$  имеет единственную особую точку  $x^0$  на области  $\bar{G}$  и непрерывна на области  $G_\varepsilon$  при  $\forall \varepsilon > 0$ , то *несобственным интегралом* функции  $f(x)$  на  $G$  называется предел (если он существует)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_\varepsilon} f(x) dx = \int_G f(x) dx. \quad (1)$$

Говорят, что в случае существования конечного предела (1) *несобственный интеграл сходится*, а если предел (1) не существует или равен бесконечности, то *расходится*.

Интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_G |f(x)| dx < \infty \quad (2)$$

от абсолютной величины  $|f(x)|$ .

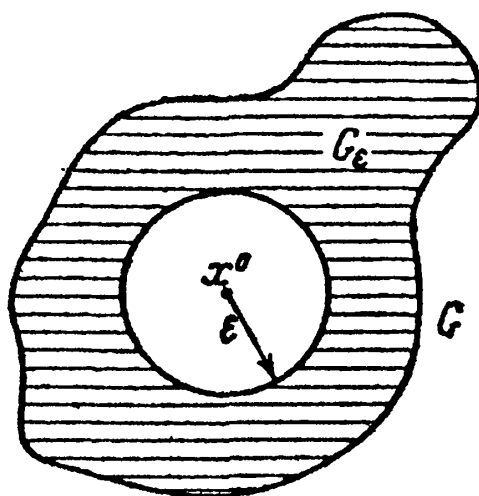


Рис. 61

<sup>1</sup> В § 2.13 мы обозначаем точки  $x, y$  светлым (не полужирным) шрифтом.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из абсолютной сходимости интеграла (2) следует, что

предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_\varepsilon} |f(x)| dx$  существует и конечен. Но тогда, при-

меняя к этому пределу признак Коши (относительно функции от одного переменного  $\varepsilon$ ), получим, что для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} \eta > \left| \int_{G_\varepsilon} |f| dx - \int_{G_{\varepsilon'}} |f| dx \right| &\geq \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} |f| dx \geq \left| \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} f dx \right| = \\ &= \left| \int_{G_\varepsilon} f dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f dx \right| \quad (\forall \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Итак, для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0$ , так что для всех положительных  $\varepsilon, \varepsilon'$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$ , имеет место

$$\left| \int_{G_\varepsilon} f dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f dx \right| < \eta.$$

А это показывает, согласно критерию Коши, что существует предел (1), т. е. существует несобственный интеграл (1).

**Пример 1.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_{\Omega} |x|^{-\alpha} dx, \quad (3)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $\Omega$  — единичный шар  $|x| \leq 1$ .

**Решение.** Функция  $|x|^{-\alpha}$  имеет единственную особую точку  $(0, 0, 0)$ . Поэтому, переходя к полярным координатам, получим

$$\int_{\Omega} |x|^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{-\alpha} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varepsilon}^1 r^2 \cos \theta \cdot r^{-\alpha} dr d\theta d\varphi = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{\varepsilon}^1 r^{2-\alpha} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^1 = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3-\alpha} (1 - \varepsilon^{3-\alpha}) = \begin{cases} 4\pi/(3-\alpha), & \alpha < 3, \\ \infty, & \alpha > 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Мы доказали, что интеграл (3) сходится при  $\alpha < 3$ . Если  $\alpha > 3$ , то интеграл (3) расходится. При  $\alpha = 3$  интеграл (3) также расходится (при вычислении интеграла по  $r$  первообразная равна  $\ln r$ ).

**З а м е ч а н и е 1.** В  $n$ -мерном пространстве, т. е. когда

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \text{ интеграл (3) сходится при } \alpha < n \text{ и расходится}$$

при  $\alpha \geq n$ .

Если область  $G$  неограничена и функция  $f(x)$  непрерывна на области  $G_R = G \cap U(0, R)$  при любом  $R$  (рис. 62), то *несобственным интегралом по неограниченной области  $G$*  называется число, равное пределу

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} f(x) dx = \int_G f(x) dx. \quad (4)$$

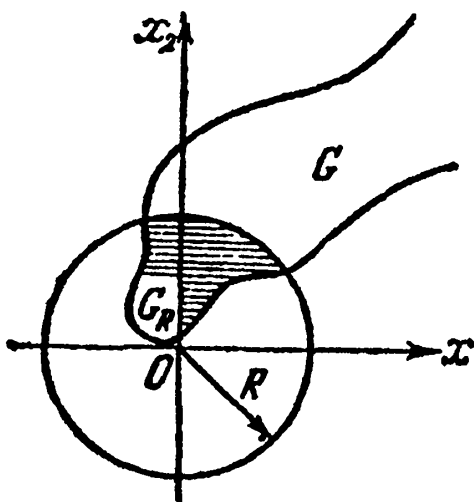


Рис. 62

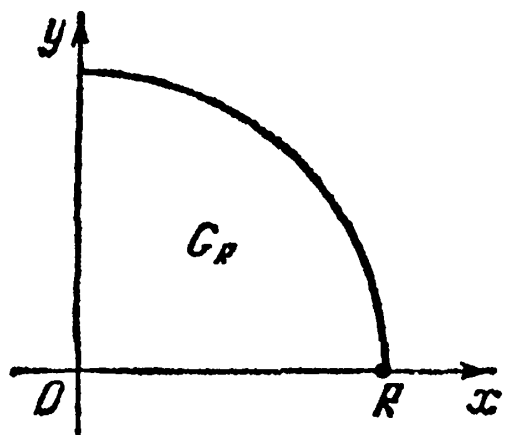


Рис. 63



Пример 2. Интеграл  $\int_G |x|^{-\alpha} dx$ , где  $G = E^3 \setminus U(0, 1)$ ,

сходится при  $\alpha > 3$  и расходится при  $\alpha \leq 3$ .

Проводя вычисления как в примере 1, получаем

$$\begin{aligned} \int_G |x|^{-\alpha} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} |x|^{-\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^R r^{-\alpha+2} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{3-\alpha} (R^{3-\alpha} - 1) = \begin{cases} \infty, & \alpha < 3, \\ 4\pi/(\alpha - 3), & \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

При  $\alpha = 3$

$$\int_G |x|^{-\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \int_1^R r^{-1} dr = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \ln R = \infty.$$

З а м е ч а н и е 2 . В  $n$ -мерном пространстве интеграл

$$\int_G |x|^{-\alpha} dx, \quad G = E^n \setminus U(0, 1),$$

сходится при  $\alpha > n$  и расходится при  $\alpha \leq n$ .

Пример 3. Исследовать интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2.$$

По определению имеем

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2,$$

где  $G_R = \{|x| \leq R, x_1 > 0, x_2 > 0\}$  — четверть круга радиуса  $R$  (рис. 63). Переходя к полярным координатам

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad (0 < \varphi < \pi/2, \quad 0 < r < R),$$

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi)} = r,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{G_R} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^R \exp(-r^2) \frac{dr^2}{2} = \frac{-\pi}{4} \exp(-r^2) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} [1 - \exp(-R^2)] \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4}, R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, этот интеграл равен

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1 dx_2 = \left( \int_0^\infty e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_0^\infty e^{-x_2^2} dx_2 \right) = \left( \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi \right)^2,$$

где несобственный интеграл от одной переменной справа (*интеграл Пуассона*) сходится. Поэтому мы получаем

$$\int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx \quad (\alpha > 0).$$

Интегрируя два раза по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^N e^{-\alpha x^2} (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx &= \left( u = \frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x}, dv = \frac{4\alpha x dx}{(2\alpha x^2 + 1)^2} \right) = \\ &= \frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x(2\alpha x^2 + 1)} \Big|_\varepsilon^N + \int_\varepsilon^N \frac{1}{2\alpha x^2 + 1} e^{-\alpha x^2} \frac{(-2\alpha x^2 - 1)}{4\alpha x^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x(2\alpha x^2 + 1)} \Big|_{\varepsilon}^N - \int_{\varepsilon}^N e^{-\alpha x^2} \frac{dx}{4\alpha x^2} = \left( u = e^{-\alpha x^2}, dv = \frac{dx}{x^2} \right) = \\
&= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x(2\alpha x^2 + 1)} \Big|_{\varepsilon}^N - \frac{1}{4\alpha} \left[ -e^{-\alpha x^2} \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^N - 2\alpha \int_{\varepsilon}^N e^{-\alpha x^2} x \frac{dx}{x} \right] = \\
&= \frac{x}{2} \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha x^2 + 1} \Big|_{\varepsilon}^N + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^N e^{-\alpha x^2} dx.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\alpha x^2} (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = (\sqrt{\alpha} x = z) = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

## § 2.14. Несобственный интеграл с особенностями вдоль линии

Пусть функция  $F(x, y)$  непрерывна на открытом круге

$$G_a = \{x^2 + y^2 < a^2\} \quad (a > 0),$$

однако не ограничена на нем. При этом мы предполагаем, что при приближении к любым точкам окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  функция  $F$  стремится к бесконечности.

Тогда для любого положительного  $b < a$  интеграл

$$\iint_{G_b} F(x, y) dx dy = \iint_{\bar{G}_b} F(x, y) dx dy$$

существует, но интеграл от  $F$  на  $G_a$  в обычном (римановом) смысле не существует. Мы ведь знаем, что из существования интеграла по  $G_a$  в римановском смысле должна следовать ограниченность  $F$  на  $G_a$ .

Однако может случиться, что существует предел

$$\lim_{\substack{b \rightarrow a \\ b < a}} \iint_{G_b} F(x, y) dx dy = I.$$

Предел  $I$  называют *интегралом от  $F$  по  $G_a$  в несобственном смысле* и обозначают как обычный риманов интеграл:

$$I = \iint_{G_a} F(x, y) dx dy .$$

С этой ситуацией мы столкнулись при рассмотрении примера 1 в § 2.11. Подынтегральная функция в приведенном там интеграле непрерывна на открытом круге  $G_a$ , но неограничена на  $G_a$ .

Площадь полусферы  $|S_a|$ , соответствующей  $G_a$ , нам пришлось определить при помощи не простого риманова интеграла, а несобственного интеграла

$$\begin{aligned} |S_a| &= \lim_{b \rightarrow a} \iint_{G_b} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_{G_a} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy . \end{aligned}$$

Мы рассмотрели пример несобственного интеграла, когда подынтегральная функция неограничена вдоль линии. В предыдущем параграфе были приведены примеры несобственных интегралов, когда подынтегральная функция неограничена в окрестности точки.

## § 2.15. Несобственный интеграл, зависящий от параметра<sup>1</sup>

Рассмотрим несобственный интеграл

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad (1)$$

зависящий от параметра  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Будем считать, что интеграл имеет единственную особенность в точке  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \bar{\Omega}$ .

Точнее, мы рассматриваем область  $\Omega$  точек  $y = (y_1, \dots, y_n)$   $n$ -мерного пространства, по которой происходит интегрирование и область  $G$  точек  $x = (x_1, \dots, x_m)$  — область па-

<sup>1</sup> В § 2.15 мы обозначаем точки пространства светлым (не полужирным) шрифтом.

раметров. Так как мы интегрируем по  $\Omega$ , а в дальнейшем будем интегрировать и по  $G$ , то будем считать, что обе области  $\Omega$  и  $G$  ограничены и имеют кусочно-гладкую границу. Что же касается функции  $f(x, y)$ , то предполагается, что она непрерывна на  $\bar{G} \times \bar{\Omega}^2$ , за исключением точек  $(x, y^0)$ , где она имеет особенность.

На  $\Omega$  в окрестности каждой точки  $(x, y^0)$  функция  $f(x, y)$ , вообще говоря, неограниченна.

Мы предполагаем, что несобственный интеграл (1) существует для всех  $x \in \bar{G}$ . Это значит, что для каждого  $x \in \bar{G}$  существует конечный предел

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega} f(x, y) dy, \quad (2)$$

где

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \quad (3)$$

и  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(y^0, \varepsilon)$  есть множество точек  $y \in \Omega$ , из которого выкинут шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $y^0$ .

Важно отметить, что интеграл (3) — это обыкновенный интеграл Римана (собственный), и так как функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ , то для него выполняются известные свойства:

1)  $F_\varepsilon(x)$  непрерывная функция от  $x \in \bar{G}$ .

2) Законно менять местами порядок интегрирования

$$\int_G dx \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} dy \int_G f(x, y) dx. \quad (4)$$

3) Законно дифференцировать под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy \quad (5)$$

при дополнительном условии, что частная производная

$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$ .

---

<sup>1</sup> Символ  $G \times \Omega$  обозначает прямое произведение множеств  $G$  и  $\Omega$ , т. е. это множество всех пар  $(x, y)$ , где  $x \in G$ ,  $y \in \Omega$ .

Возникает вопрос, сохраняются ли свойства 1) – 3) при  $\varepsilon = 0$ , т. е. сохраняются ли они для собственного интеграла (1). Это, вообще говоря, не так. Однако, если на сходимость  $F_\varepsilon(x)$  к  $F(x)$  и  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon$  к  $\frac{\partial}{\partial x_j} F$  наложить дополни-

тельное условие равномерной сходимости, то свойства 1) – 3) сохраняются. В связи с этим полезно понятие равномерной сходимости интеграла.

По определению *интеграл (1) сходится равномерно на  $\bar{G}$  (или по  $x \in \bar{G}$ ), если*

$$F_\varepsilon(x) \rightarrow F(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

т. е.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \rightarrow \int_{\Omega} f(x, y) dy \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

*равномерно на  $\bar{G}$ .*

*Другими словами, интеграл (1) сходится равномерно на  $\bar{G}$ , если выполняется условие: для любого  $\eta > 0$  существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что*

$$\begin{aligned} |F(x) - F_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\Omega} f(x, y) dy - \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \right| < \eta \\ &(\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall x \in \bar{G}). \end{aligned}$$

К равномерно сходящимся интегралам можно применить теорию равномерно сходящихся последовательностей функций, связанную с теорией равномерно сходящихся рядов.

Мы знаем, что если последовательность функций  $F_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), непрерывных на множестве  $\bar{G}$ , сходится равномерно на  $\bar{G}$ , то предельная функция  $F(x)$  непрерывна на  $\bar{G}$ , и тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G F_n(x) dx = \int_G F(x) dx. \quad (6)$$

Мы знаем также, что если дополнительно считать, что частные производные  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x)$  существуют и непрерывны на  $\bar{G}$  и, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x) \rightarrow \psi(x) \quad (x \in \bar{G}),$$

равномерно на  $\bar{G}$ , то функция  $F(x)$  имеет производную  $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x)$ , равную  $\psi(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x) \quad (\forall x \in \bar{G}).$$

При доказательстве этих свойств не имеет значения тот факт, что  $n$ , возрастая, пробегает натуральные числа. Можно считать также, что  $n = \varepsilon$  стремится непрерывно к нулю ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Поэтому указанные свойства автоматически переносятся на равномерно сходящиеся несобственные интегралы.

**Теорема 1.** *Если интеграл (1) равномерно сходится на  $\bar{G}$  и функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ , за исключением точек  $(x, y^0)$ , то интеграл (1) есть непрерывная функция от  $x$ . При этом*

$$\int_G dx \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx.$$

В самом деле, из непрерывности  $F_{\varepsilon}(x)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , и равномерной сходимости  $F_{\varepsilon}(x) \rightarrow F(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , на  $\bar{G}$  следует, что  $F(x)$  непрерывна на  $\bar{G}$ . Далее,

$$\begin{aligned} \int_G dx \int_{\Omega} f(x, y) dy &= \int_G F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G F_{\varepsilon}(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G dx \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(x, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} dy \int_G f(x, y) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx .$$

В этой цепи мы воспользовались (во втором равенстве) формулой

$$\int_G F_{\varepsilon}(x) dx \rightarrow \int_G F(x) dx \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

верной, потому что  $F_{\varepsilon}$  и  $F$  непрерывны на  $G$  и  $F_{\varepsilon} \rightarrow F$  равномерно на  $\bar{G}$ , и (в четвертом равенстве) формулой (4).

**Теорема 2.** Если, кроме того, что выполняются условия теоремы 1, известно, что частная производная

$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ , за исключением точек  $(x, y^0)$ , и интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

равномерно сходится на  $\bar{G}$ , то имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy, \quad (7)$$

т. е. законно дифференцировать под знаком интеграла.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy &= \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\varepsilon}(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(x, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy . \end{aligned}$$

Во втором равенстве этой цепи применено свойство:

если функция  $F_{\varepsilon}(x)$  и  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_{\varepsilon}(x)$  непрерывны на  $\bar{G}$  и обе

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно сходятся на  $\bar{G}$  соответственно к  $F(x)$



и  $\psi(x)$ , то  $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x)$  на  $\bar{G}$ . В четвертом равенстве применено свойство (5), верное для любого  $\varepsilon > 0$ .

Следующая теорема дает достаточный признак равномерной сходимости несобственного интеграла (1).

**Теорема 3 (признак Вейерштрасса<sup>1</sup>).** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ , за исключением точек  $(x, y^0)$  ( $y^0 \in \bar{\Omega}$ ), и удовлетворяет на  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$  неравенству

$$|f(x, y)| \leq \varphi(y) \quad (x \in \bar{\Omega}), \quad (8)$$

где интеграл

$$\int_{\Omega} \varphi(y) dy < \infty \quad (8')$$

сходится, то интеграл (1) равномерно сходится на  $\bar{G}$ .

**Доказательство.** Зададим  $\eta > 0$ . В силу сходимости интеграла (8') найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\eta > \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \varphi(y) dy \right| \geq \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |f(x, y)| dy \geq \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \right|.$$

Во втором неравенстве мы воспользовались условием (8). Таким образом  $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$  так, что для всех  $\varepsilon$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\eta > \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \right|.$$

А это значит, что интеграл (1) сходится равномерно на  $\bar{G}$ .

**Пример 1. Интеграл**

$$\psi(a) = \int_0^1 x^{a-1} dx \quad (a > 0) \quad (9)$$

<sup>1</sup> К. Т. В. Вейерштрасс (1815–1897) – выдающийся немецкий

существует для любых  $a > 0$ . При  $0 < a < 1$  точка  $x = 0$  особая, а при  $a \geq 1$  на отрезке  $[0, 1]$  подынтегральная функция непрерывна и интеграл никаких особенностей не имеет.

Для выяснения вопроса о равномерной сходимости несобственного интеграла мы должны оценить интеграл

$$\left| \int_0^\varepsilon x^{a-1} dx \right| = \frac{\varepsilon^a}{a} \quad (\varepsilon > 0),$$

который принято называть остатком интеграла, соответствующего особой точке  $x = 0$ . Для произвольного  $\eta > 0$  невозможно подобрать  $\varepsilon_0 > 0$  так, чтобы остаток был меньшим  $\eta$ ,  $\forall a > 0$ ,  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ , потому что при любом фиксированном  $\varepsilon$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^a}{a} = \infty \quad (a > 0).$$

Поэтому интеграл (9) сходится неравномерно относительно

$$a > 0.$$

Отметим, что функция  $x^{a-1} = \varphi(x, a)$  непрерывна на  $(0, 1] \times [0, 1]$ .

Далее очевидно, что для  $0 < a_0 \leq a \leq 1$  интеграл (9) сходится равномерно. В самом деле, если  $a_0 \leq a$ , то на отрезке  $[0, \varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $x^{a-1} \leq x^{a_0-1}$ , а интеграл

$$\int_0^\varepsilon x^{a_0-1} dx = \frac{\varepsilon^{a_0}}{a_0} < \infty;$$

поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл (9) равномерно сходится для  $a_0 \leq a \leq 1$ .

Итак, интеграл (9) есть непрерывная функция на  $[a_0, 1]$ , следовательно на  $(0, 1]$ , так как  $a_0 > 0$  произвольно.

Если  $a > 0$ , то интеграл (9) можно дифференцировать под знаком интеграла, т. е.

$$\psi'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x dx. \quad (10)$$

В самом деле, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x = 0$  ( $\lambda > 0$ ), то функция

$$\mu(x) = \begin{cases} x^\lambda \ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на  $[0, 1]$  и, следовательно, ограничена на  $[0, 1]$ . Поэтому для  $0 < a_0 \leq a \leq 1$

$$|x^{a-1} \ln x| \leq |x^{a-\lambda-1}| |x^\lambda \ln x| \leq c |x^{a_0-\lambda-1}|$$

и интеграл

$$\int_0^\varepsilon x^{a_0-\lambda-1} dx = \frac{\varepsilon^{a_0-\lambda}}{a_0-\lambda} < \infty \quad (0 < \lambda \leq a_0).$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса интеграл справа в (10)

равномерно сходится. Далее функция  $\frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} = x^{a-1} \ln x$  непрерывна на  $[0, 1] \times [0, 1]$ , за исключением точек с  $x = 0$ , поэтому, согласно теореме 2, формула (10) верна.

Интеграл (1) можно рассматривать для неограниченной области  $\Omega$ , считая, что функция  $f(x, y)$  непрерывна на множестве  $\bar{G} \times \Omega$  точек  $(x, y)$ . Так как область  $\Omega$  неограниченна, интеграл (1) как риманов не существует, но он может существовать в несобственном смысле, как предел

$$\lim_{R \rightarrow 0} F_R(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega_R} f(x, y) dy = \int_{\Omega} f(x, y) dy = F(x), \quad (11)$$

где  $\Omega_R = \Omega \cap U(0, R)$ ,  $U(0, R)$  — шар с центром в нулевой точке радиуса  $R$ .

Мы считаем, что

$$F_R(x) = \int_{\Omega_R} f(x, y) dy$$

и что существует предел

$$\lim_{R \rightarrow 0} F_R(x) = F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$$

для всех  $x \in \bar{G}$ , т. е. считаем, что интеграл (11) как несобственный существует для всех  $x \in \bar{G}$ .

В данном случае говорят, что *особой точкой интеграла (11) является бесконечно удаленная точка*.

По определению интеграл (11) называется *равномерно сходящимся*, если  $F_R(x) \rightarrow F(x)$ ,  $R \rightarrow \infty$ , равномерно относительно  $x \in \bar{G}$ .

Так же как в случае конечной особой точки, доказывается, что для непрерывной на  $\bar{G} \times \Omega$  функции  $f(x, y)$  интеграл (11), если он равномерно сходится на  $\bar{G}$ , есть непрерывная функция от  $x \in \bar{G}$ . Далее, если  $G$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, то имеет также место равенство

$$\int_G dx \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx.$$

Если  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  непрерывна на  $\Omega$  и интеграл по  $\Omega$  от  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

равномерно сходится по  $x \in \bar{G}$ , то (11) можно дифференцировать под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

**Пример 2.** Исследовать интеграл

$$I(x) = \int_0^{\infty} x e^{-xy} dy \quad (x \geq 0).$$

Очевидно, что  $I(0) = 0$ , а при  $x > 0$

$$I(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-xy} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-xy}) \Big|_0^R = 1.$$

Таким образом, функция  $I(x)$  разрывна на  $\{0, \infty\}$ . Это связано с тем, что наш интеграл сходится неравномерно: остаток интеграла

$$\int_R^{\infty} x e^{-xy} dy = e^{-Rx}$$

не стремится к нулю при любом фиксированном  $R$  и  $x \rightarrow 0$  (он стремится к 1).

Пример 3. Гамма-функция. Интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (12)$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровым интегралом второго рода*.

При  $a \geq 1$  он имеет особую точку  $x = \infty$ , а при  $0 < a < 1$  он имеет две особые точки  $x = 0$ ,  $x = \infty$ .

При исследовании этого интеграла удобно разложить его на два интеграла

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Так как для  $0 < x \leq 1$  имеем  $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a-1}$ , то (как это видно из примера 1) первый интеграл равномерно сходится для всех  $a \geq a_0 > 0$ , каково бы ни было число  $a_0 > 0$ . Второй интеграл, очевидно, сходится для всякого действительного  $a$ .

Если  $a_0$  — любое число, то для  $a \leq a_0$

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_0-1} e^{-x} \quad (1 \leq x < \infty),$$

и так как

$$\int_1^{\infty} x^{a_0-1} e^{-x} dx < \infty,$$

то по признаку Вейерштрасса второй интеграл равномерно сходится  $\forall a \leq a_0$ . Однако сходимость этого интеграла при любом  $a$  не является равномерной.

Например, при  $a > 1$  и  $R > 1$

$$\int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \geq R^{a-1} \int_R^{\infty} e^{-x} dx = R^{a-1} e^{-R} \rightarrow \infty$$

при  $a \rightarrow +\infty$  и любом фиксированном  $R$ .

При  $a > 1$

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx =$$
$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -x^{a-1} e^{-x} \Big|_0^R + (a-1) \int_0^R x^{a-2} e^{-x} dx \right\} = (a-1)\Gamma(a-1).$$

Поэтому при  $a = n$  натуральном

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) =$$

$$= n! \int_0^{\infty} e^{-x} dx = n!,$$

откуда видно, что гамма-функцию естественно рассматривать как обобщение факториала.

## ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

### § 3.1. Кусочно-гладкая ориентированная кривая

Кривая

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

называется *непрерывной кусочно-гладкой*, если функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  непрерывны на  $[a, b]$  и отрезок  $[a, b]$  можно разбить на конечное число частичных отрезков точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

так, что на каждом из них функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  имеют непрерывные производные, одновременно не равные нулю<sup>1</sup>.

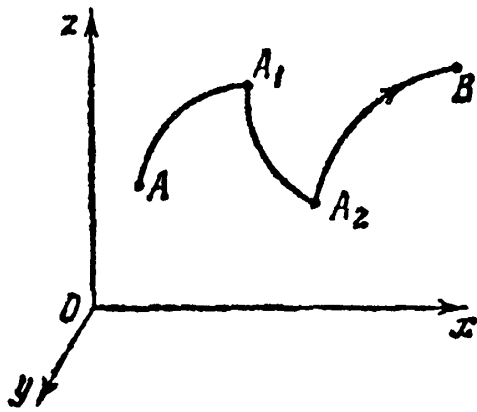


Рис. 64

На рис. 64 изображена непрерывная кусочно-гладкая кривая. В точках  $A_1$  и  $A_2$  она непрерывна, но производные  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  все или некоторые терпят разрыв (первого рода!).

Кривую (1) будем обозначать одной буквой, например буквой  $\Gamma$ . Обычно  $\Gamma$  обозначает не только геометрическое место точек  $(x, y, z)$ , определяемых уравнением (1), но и порядок следования этих точек, когда  $t$  непрерывно возрастает от  $a$  до  $b$  ( $a < b$ !). В этом смысле говорят,

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», §§ 4.21, 7.3.

что  $\Gamma$  есть *ориентированная кривая*. Порядок следования обозначают на рисунке стрелкой (рис. 64) — когда  $t$  непрерывно *возрастает* от  $a$  до  $b$ , точка  $(x, y, z)$  движется по  $\Gamma$  в направлении стрелки.

Если  $t = \lambda(\tau)$  есть функция, имеющая непрерывную положительную производную на некотором отрезке  $[c, d]$  и при этом  $\lambda(c) = a$ ,  $\lambda(d) = b$ , то уравнение

$$r(\lambda(\tau)) = \varphi[\lambda(\tau)]i + \psi[\lambda(\tau)]j + \chi[\lambda(\tau)]k \quad (c \leq \tau \leq d) \quad (1')$$

определяет ту же ориентированную кривую, что и  $\Gamma$ . Ее обозначают той же буквой  $\Gamma$ , только говорят в случае уравнения (1), что  $\Gamma$  определяется параметром  $t$ , а в случае (1') — параметром  $\tau$ . В обоих случаях при возрастании  $t$  от  $a$  до  $b$  или возрастании  $\tau$  от  $c$  до  $d$  соответствующие точки  $\Gamma$  движутся в одном и том же направлении.

Другое дело, если совершить замену  $t = \lambda(\tau)$ , где  $\lambda(\tau)$  имеет непрерывную отрицательную производную на отрезке  $[c, d]$  ( $c < d$ ). В этом случае  $\lambda(c) = b$ ,  $\lambda(d) = a$ , и при непрерывном возрастании  $\tau$  от  $c$  до  $d$  параметр  $t$  будет убывать и стрелку на нашем геометрическом объекте придется направить в другую сторону.

Поэтому кривую (1') в случае, когда  $\lambda'(\tau) < 0$ , мы будем обозначать другим символом  $\Gamma_-$  и говорить, что  $\Gamma_-$  *есть та же кривая, что и  $\Gamma$ , но ориентированная в противоположную сторону*. Иногда исходную ориентированную кривую мы будем обозначать символом  $\Gamma_+$ .

Ориентированная кривая (1) называется *замкнутой* или *замкнутым контуром*, если  $r(a) = r(b)$  или, что все равно, если

$$\varphi(a) = \varphi(b), \psi(a) = \psi(b), \chi(a) = \chi(b).$$

Иначе говоря, когда значение параметра  $t$  непрерывно возрастает от  $a$  до  $b$ , соответствующая точка  $(x, y, z)$  проходит в пространстве непрерывный путь, начинающийся и кончающийся в одной и той же точке. Если при этом

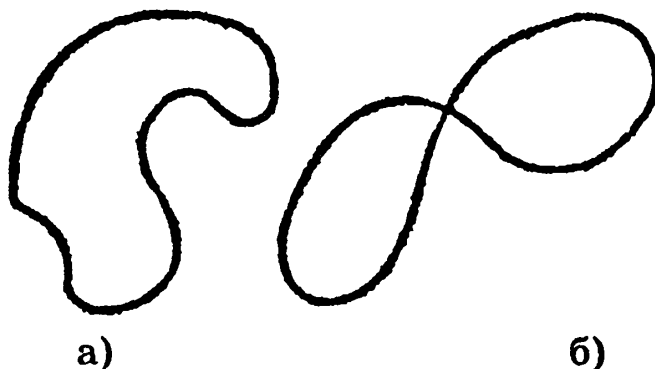


Рис. 65



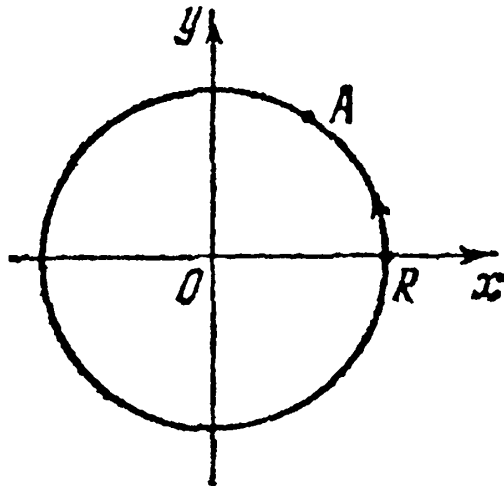


Рис. 66

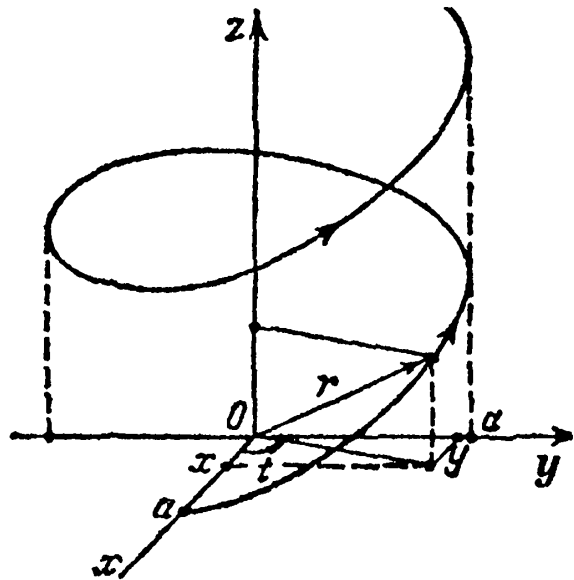


Рис. 67

кривая  $\Gamma$  в других точках сама себя не пересекает, то она называется *замкнутой самонепересекающейся кривой*. На рис. 65,а изображена замкнутая самонепересекающаяся кривая, а на рис. 65,б – замкнутая *самопересекающаяся* кривая.

**З а м е ч а н и е.** Векторное уравнение (1) кривой  $\Gamma$  эквивалентно трем уравнениям

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

**П р и м е р 1.** Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением

$$r(t) = iR\cos t + jR\sin t$$

$$(x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Так как  $x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$ , то данная кривая есть окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат. При возрастании  $t$  от 0 до  $2\pi$  точка  $A = (x, y)$  движется по окружности против часовой стрелки. При этом разным  $t$  соответствуют разные точки  $A$ . При  $t = 0$  и  $t = 2\pi$  имеем  $r(0) = r(2\pi) = iR$ . Значит, окружность является замкнутой самонепересекающейся кривой (рис. 66).

**П р и м е р 2.** Кривая

$$r(t) = a(icost + jsint) + btk,$$

где  $0 \leq t < \infty$ ,  $a, b$  – положительные числа, называется *винтовой линией*. Ее можно получить следующим образом. Отрезок длины  $a$ , перпендикулярный оси  $z$ , одним концом скользит по оси  $z$  и одновременно поворачивается около оси  $z$ , тогда другой конец отрезка описывает винтовую линию. Мы считаем, что высота подъема отрезка по оси  $z$  пропорциональна углу поворота  $t$  ( $z = bt$ ). При возрастании  $t$  точка  $(x, y, z)$  движется, как указано на рис. 67. Очевидно, что винтовая линия расположена на боковой поверхности кругового цилиндра радиуса  $a$ , с образующей, параллельной оси  $z$ .

### § 3.2. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая кривая  $\Gamma$

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

и пусть на  $\Gamma$  или в окрестности  $\Gamma$  определена непрерывная функция  $F(x, y, z)$ .

*Криволинейным интегралом первого рода от функции  $F(x, y, z)$  по кривой  $\Gamma$  называется число, равное*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x, y, z) ds &= \\ &= \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Левая часть (2) есть обозначение интеграла первого рода, а правая часть есть его определение — это обычный определенный интеграл по  $t$  на  $[0, T]$ .

Например, если кривая  $\Gamma$  обладает массой с плотностью распределения  $F(x, y, z)$  в точках  $(x, y, z) \in \Gamma$ , то общая масса  $M$  кривой вычисляется посредством интеграла (2). Ведь элемент материальной кривой, соответствующий отрезку  $[t, t + dt]$  изменения  $t$ , имеет массу, равную, с точностью до бесконечно малой высшего порядка,

$$F ds = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt,$$

где  $ds$  — дифференциал дуги  $\Gamma$ , это показывает, что  $M$  равна правой части (2).

*Величина интеграла первого рода не изменяется при перемене ориентации кривой:*

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_-} F(x, y, z) ds. \quad (3)$$

Вычислять массу материальной кривой при помощи интеграла, стоящего в левой части или в правой части (3) — это, очевидно, все равно.

Например, кривую (1) можно задать уравнениями

$$x = \varphi(T - \tau), \quad y = \psi(T - \tau), \quad z = \chi(T - \tau) \quad (0 \leq \tau \leq T),$$

ориентирующими ее в противоположном направлении, и тогда

$$\begin{aligned}
& \int_0^T F[\varphi(T-\tau), \psi(T-\tau), \chi(T-\tau)] \times \\
& \times \sqrt{\varphi'(T-\tau)^2 + \psi'(T-\tau)^2 + \chi'(T-\tau)^2} d\tau = \\
& = - \int_T^0 F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt = \\
& = \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.
\end{aligned}$$

**Пример 1.** Пусть вдоль винтовой линии, определенной в примере 2 §3.1, распределены массы с плотностью  $F(x, y, z) = z^2$ . Найти массу  $M$  участка винтовой линии, когда параметр  $t$  изменяется от 0 до 3 ( $0 \leq t \leq 3$ ).

Запишем уравнение рассматриваемой винтовой линии в виде

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 3).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^3 F[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \\
&= \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \\
&= b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^3 t^2 dt = 9b^2 \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл первого рода по эллипсу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

от функции  $F(x, y) = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}$ .

Имеем

$$\int_{\Gamma} F(x, y) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) dt = \pi(a^2 + b^2).
\end{aligned}$$

### § 3.3. Интеграл от вектора вдоль кривой

3.3.1. Поле вектора. Пусть  $\Omega$  есть область пространства  $R_3$ , где задана прямоугольная система координат  $x, y, z$  и из каждой точки  $A \in \Omega$  выпущен вектор  $a$ , зависящий, вообще говоря, от этой точки. Тогда

$$\begin{aligned}
a(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k \\
((x, y, z) \in \Omega)
\end{aligned} \quad (1)$$

или более кратко

$$a = Pi + Qj + Rk, \quad (1')$$

где  $P, Q, R$  — функции от  $(x, y, z)$ , определенные на области  $\Omega$ .

Говорят, что равенство (1) определяет *поле вектора  $a$  на области  $\Omega$* .

Если  $P, Q, R$  — непрерывные функции на  $\Omega$ , то и вектор  $a$  есть непрерывная вектор-функция на  $\Omega$ .

Соответственно, если  $P, Q, R$  имеют непрерывные частные производные, то и про вектор  $a$  говорят, что он имеет это свойство.

**Пример 1.** Пусть в начале координат  $O$  сконцентрирована масса  $m_1$ . Тогда в области  $\Omega$ , представляющей собой пространство  $R_3$  без точки  $O$ , возникает поле силы тяготения.

Физически его можно обнаружить, если поместить в произвольной точке  $A = (x, y, z)$  (отличной от начала координат  $O$ ) массу  $m_2$ . Тогда масса  $m_2$  будет притягиваться к массе  $m_1$  с силой  $F$ , скалярная величина которой равна

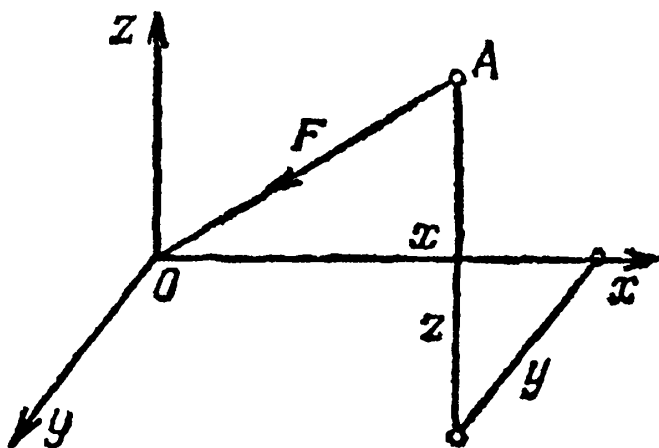


Рис. 68

$$|\mathbf{F}| = \frac{cm_1m_2}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2)$$

где  $c$  — некоторая постоянная, а  $r$  — расстояние от точки  $A$  до  $O$ . Если считать, что  $cm_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ , то

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{r^2}.$$

Так как вектор  $\mathbf{F}$  направлен от точки  $A$  к точке  $O$  (рис. 68), то его компоненты на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно равны

$$P = -\frac{x}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad Q = -\frac{y}{r^3}, \quad R = -\frac{z}{r^3}$$

(вектор  $\mathbf{F}$  и направленный отрезок  $\overrightarrow{AO}$  образуют с осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  углы, косинусы которых соответственно равны  $-\frac{x}{r}$ ,  $-\frac{y}{r}$ ,  $-\frac{z}{r}$ ).

В связи с полем вектора тяготения можно рассматривать функцию

$$u(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Легко проверить, что ее частные производные по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно равны компонентам вектора  $\mathbf{F}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} = R.$$

Благодаря этому свойству функция  $u$  называется *потенциальной функцией для вектора  $\mathbf{F}$* .

3.3.2. Криволинейный интеграл от вектора вдоль кривой. Пусть в пространстве  $R_3$ , где определена прямоугольная система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , задана ориентированная непрерывная кусочно-гладкая кривая  $\Gamma$  с начальной точкой  $A_0$  и конечной  $A_1$ . Если  $\Gamma$  замкнута, то  $A_0$  совпадает с  $A_1$ . Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

— уравнения  $\Gamma$  и значению  $t = 0$  соответствует точка  $A_0$ , а  $t = T$  — точка  $A_1$ .

В каждой внутренней (не угловой) точке  $A$  любого гладкого куска  $\Gamma$  однозначно определен единичный вектор  $\tau$  касательной к  $\Gamma$ , направленный в сторону возрастания  $t$ .

Пусть на  $\Gamma$  или на множестве  $\Omega$ , содержащем  $\Gamma$ , задано поле непрерывного вектора (задан вектор)

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где, таким образом  $P, Q, R$  – непрерывные функции на  $\Gamma$  (или  $\Omega$ ).

Лучше всего представить себе эту картину так (рис. 69): из любой точки  $(x, y, z) \in \Gamma$  (или  $\Omega$ ) выпущен вектор  $\mathbf{a}$ , направление и длина которого зависят от этой точки ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ ).

Будем считать, что вектор  $\mathbf{a}$  – сила, и надо найти работу этой силы вдоль ориентированного пути  $\Gamma$ .

Пусть  $t$  – значение параметра, которому соответствует точка  $A$  кривой  $\Gamma$ . Значению же  $t + dt$  соответствует точка

$A' \in \Gamma$ . Вектор  $\overrightarrow{AA'}$  приближенно равен вектору

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz,$$

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt, \quad dz = \chi'(t)dt,$$

направленному по касательной к  $\Gamma$  в сторону возрастания  $t$  (рис. 70).

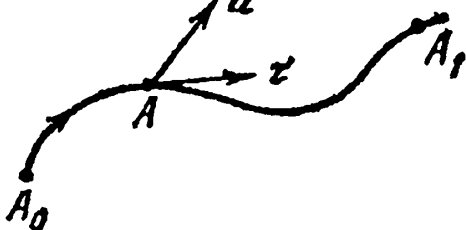


Рис. 69

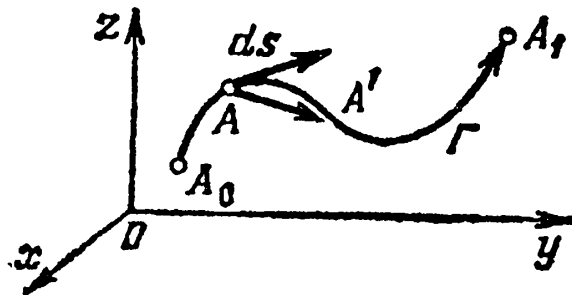


Рис. 70

Элементарная работа силы  $\mathbf{a}$  при изменении параметра от  $t$  до  $t + dt$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна скалярному произведению векторов  $\mathbf{a}$  и  $d\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)]dt.$$

Чтобы получить полную работу вдоль всего ориентированного пути  $\Gamma$ , надо проинтегрировать это выражение по  $t$  на отрезке  $[0, T]$ .

В результате получим

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}) = \int_0^T [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \quad (3)$$

Левая часть этого равенства называется *криволинейным интегралом вдоль ориентированного пути  $\Gamma$  от вектора  $\mathbf{a}$*  или, короче, *интегралом от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $\Gamma$* .

Правая часть (3) представляет собой обычный интеграл от указанной там функции по  $t$  в пределах  $[0, T]$ .

Левая часть есть обозначение нового понятия — интеграла от вектора  $\mathbf{a}$  по  $\Gamma$ , а правая — есть его определение.

Отметим, что функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны по  $(x, y, z) \in \Gamma$ , функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  непрерывны по  $t$  на отрезке  $[0, T]$ , функции же  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  непрерывны для всех значений  $t \in [0, T]$ , за исключением конечного числа точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

где они, быть может, имеют разрывы первого рода.

Но тогда подынтегральная функция от  $t$  в правой части (3) непрерывна на каждом из отрезков  $[t_k, t_{k+1}]$  в отдельности и

интеграл  $\int_{t_k}^{t_{k+1}}$  от этой функции существует, поэтому существует интеграл

$$\int_0^T = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}}.$$

Криволинейный интеграл (3) записывают еще следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) &= \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \\ &= \int_{\Gamma} (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы вычислить его, надо подставить в него соответственно

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & y &= \psi(t), & z &= \chi(t), \\ dx &= \varphi'(t) dt, & dy &= \psi'(t) dt, & dz &= \chi'(t) dt \end{aligned}$$

и полученное выражение проинтегрировать от 0 до  $T$ .

Как левая, так и правая часть равенства (4) называется еще *криволинейным интегралом второго рода*.

**3.3.3. Свойства криволинейных интегралов второго рода.** Если ориентированная кривая  $\Gamma$  представляет собой сумму двух различных ориентированных кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ), то

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{a} ds) + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{a} ds).$$

На рис. 71 изображена ориентированная кривая  $\Gamma$ , разрезанная на две соответственно ориентированные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

На рис. 72 изображены два ориентированных замкнутых контура  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Под  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  понимается сложный ориентированный контур — объединение  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

По определению считается, что

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}.$$

Справедливо свойство: если  $\Gamma_-$  есть та же кривая, что и  $\Gamma$ , но ориентированная противоположно, то

$$\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} ds) = - \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds).$$

Из механических соображений это свойство очевидно. Работы одной и той же силы  $\mathbf{a}$  вдоль  $\Gamma$  и вдоль  $\Gamma_-$ , очевидно, равны, но противоположны по знаку.

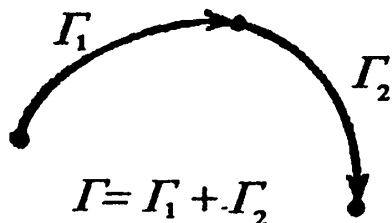


Рис. 71

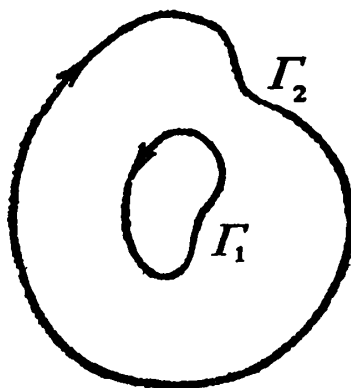


Рис. 72

Докажем все же это свойство формально. Это имеет смысл, чтобы яснее представить себе различие интегралов второго и первого рода. Ведь интеграл первого рода, как мы знаем, не меняет знака при перемене ориентации  $\Gamma$ .

Пусть  $\tau$  есть единичный вектор касательной к  $\Gamma$ , направленный в сторону возрастания параметра  $t$ . Тогда

$$ds = \tau ds,$$

где скаляр  $ds$  — дифференциал дуги  $\Gamma$ . Поэтому

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \tau) ds.$$



Правая часть этого равенства есть интеграл первого рода от функции  $(a\tau)$  по  $\Gamma$ . Он, как мы знаем, не зависит от ориентации  $\Gamma$ . Поэтому (пояснения ниже)

$$\int_{\Gamma} (a\tau) ds = \int_{\Gamma_-} (a\tau) ds = - \int_{\Gamma_-} (a(-\tau)) ds = - \int_{\Gamma_-} (ads).$$

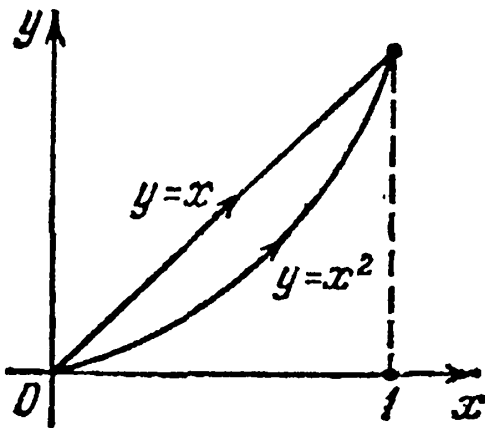


Рис. 73

В первом равенстве этой цепи мы заменили в интеграле первого рода  $\Gamma$  на  $\Gamma_-$ , не изменяя подынтегральную функцию. Во втором равенстве мы заменили  $\tau$  на  $-\tau$ , поставив перед интегралом знак минус, чтобы компенсировать это изменение. В третьем равенстве надо учесть, что  $-\tau$  есть единичный вектор касательной к  $\Gamma_-$ .

Итак,

$$\int_{\Gamma} (ads) = - \int_{\Gamma_-} (ads).$$

Пример 2. Вычислить интеграл второго рода (рис. 73)

$$I = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy)$$

вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки  $(0, 0)$  в точку  $(1, 1)$ , и по дуге параболы  $y = x^2$ , соединяющей эти же точки.

В первом случае имеем ( $y = x$ )

$$I_1 = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy) = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Во втором случае ( $y = x^2$ )

$$I_2 = \int_0^1 (x^2 dx + x^3 2x dx) = \int_0^1 (x^2 + 2x^4) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{5}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} (x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy)$$

вдоль тех же кривых, что и в примере 1.

Имеем ( $y = x$ )

$$I_1 = \int_0^1 (x^3 dx + \frac{x^3}{3} dx) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Далее, при  $y = x^2$  получаем

$$I_2 = \int_0^1 (x^4 dx + \frac{x^3}{3} 2x dx) = \int_0^1 (x^4 + \frac{2}{3} x^4) dx = \frac{5}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}.$$

Эти примеры показывают, что интеграл второго рода, вообще говоря, зависит от кривой, по которой он вычисляется, или, как еще говорят, он зависит от пути интегрирования.

Во втором примере мы получили одно и то же значение по разным путям интегрирования. Оказывается, это не случайно. Причину последнего свойства мы выясним в дальнейшем.

## § 3.4. Поле потенциала

### 3.4.1. Понятие потенциала и его свойства.

Важным случаем поля вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

является тот, когда на области  $\Omega$ , где задано поле, существует функция  $U(x, y, z)$ , имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются равенства (на  $\Omega$ )

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Такую функцию называют *потенциальной функцией* или *потенциалом* вектора  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$ . Говорят еще, что вектор  $\mathbf{a}$  есть *градиент функции*  $U$  и пишут<sup>1</sup>

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

**Пример 1.** Функция

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

определена на всем пространстве, исключая нулевую точку  $(0, 0, 0)$ . Ее градиент равен

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 8.8.

$$\operatorname{grad}U = \frac{x}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z}{r^3} \mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

В равенстве

$$\mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right)$$

в скобках стоит единичный вектор, направленный в сторону радиус-вектора точки  $(x, y, z)$ . Но тогда

$$|\mathbf{a}| = \frac{1}{r^2}.$$

Эти факты можно интерпретировать следующим образом. В нулевой точке находится единичный электрический заряд; в точке  $(x, y, z)$  тоже находится единичный заряд того же знака. Сила взаимодействия (отталкивания) между этими зарядами есть вектор, приложенный в точке  $(x, y, z)$ , направленный как радиус-вектор точки  $(x, y, z)$ ; его величина равна  $1/r^2$ .

Мы видим, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет потенциал  $U = -1/r$ .

Перейдем к общим свойствам поля вектора, имеющего потенциал.

**Теорема 1.** *Для того чтобы поле вектора  $\mathbf{a}$ , заданного в области  $\Omega$  пространства, имело потенциал, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:*

1) *Интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  по любому замкнутому (кусочно-гладкому) контуру  $\Gamma$ , принадлежащему к  $\Omega$ , равен нулю.*

2) *Интеграл по любому (кусочно-гладкому) пути  $\Gamma \subset \Omega$ , соединяющему любые две точки  $\Omega$ , не зависит от пути интегрирования.*

*Если  $U(x, y, z)$  – потенциальная функция вектора  $\mathbf{a}$ , то интеграл от  $\mathbf{a}$  вдоль любого пути  $\Gamma_{AB} \subset \Omega$ , соединяющего точки  $A = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = (x, y, z)$ , равен*

$$\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{a} \, ds) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

**3.4.2. Доказательство свойств потенциала.** Прежде всего докажем эквивалентность свойств 1) и 2).

Пусть справедливо свойство 1). Зададим в  $\Omega$  две точки  $A$  и  $B$  (рис. 74). Соединим их двумя различными ориентированными от  $A$  до  $B$  кривыми  $\Gamma$  и  $\Gamma''$ , принадлежащими  $\Omega$ . В силу 1)

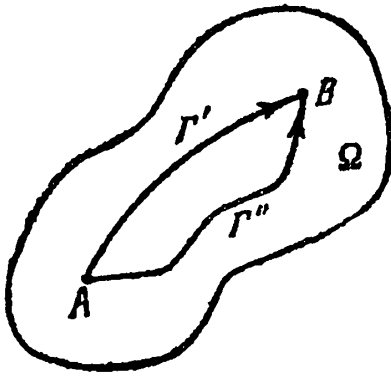


Рис. 74

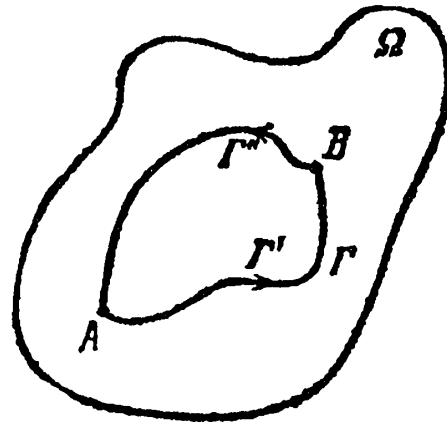


Рис. 75

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = 0,$$

поэтому

$$\int_{\Gamma'} = - \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma''},$$

и мы доказали свойство 2).

Обратно, пусть верно свойство 2). Зададим произвольный ориентированный замкнутый контур  $\Gamma$  (рис. 75).

Разрежем его в точках  $A$  и  $B$  соответственно на две ориентированные кривые

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$$

По свойству 2)

$$\int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''},$$

откуда

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma'} = 0,$$

и мы доказали 1).

Пусть теперь известно, что поле вектора  $\mathbf{a}$  имеет в области  $\Omega$  потенциальную функцию  $U(x, y, z)$ .

Зададим на  $\Omega$  точку  $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и переменную точку  $A = (x, y, z)$ . Соединим  $A_0$  с  $A$  ориентированной от  $A_0$  до  $A$  непрерывной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma = \Gamma_{A_0 A}$ , определенной уравнениями

$$x = \varphi(\tau), y = \psi(\tau), z = \chi(\tau) \quad (t_0 \leq \tau \leq t).$$

Таким образом, значениям  $t_0, t$  параметра  $\tau$  соответствуют точки  $A_0, A$ .

Если подставить в  $U$  вместо  $x, y, z$  соответственно функции  $\varphi, \psi, \chi$ , то  $U$  будет непрерывной кусочно-гладкой

функцией от  $\tau$ . На основании теоремы о производной сложной функции в точках гладкости  $\Gamma$  (где  $\Gamma$  имеет касательную)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial \tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) &= \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial x} \varphi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial y} \psi'(\tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial z} \chi'(\tau) \right) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau = U[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] - \\ &- U[\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)] = \\ &= U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(A) - U(A_0) \equiv V(A), \quad (2) \end{aligned}$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода при фиксированной точке  $A_0$  зависит только от положения точки  $A \in \Omega$ , но не от пути, по которому она достигается из точки  $A_0$ . Этим доказано свойство (2) и равенство (1), если известно, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет в области  $\Omega$  потенциальную функцию  $U(x, y, z)$ .

Нам остается доказать, что из свойства 2) следует, что существует определенная на  $\Omega$  потенциальная функция  $U(x, y, z)$ , градиент которой на  $\Omega$  равен  $\mathbf{a}$ . В самом деле,

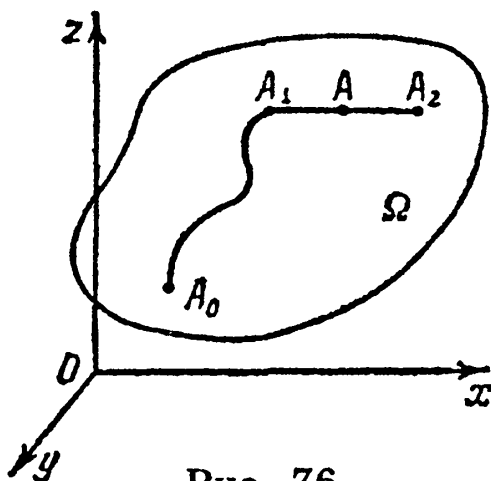


Рис. 76

зададим фиксированную точку  $A_0 \in \Omega$  (рис. 76). Пусть известно, что выполняется свойство 2), т. е. данное поле вектора  $\mathbf{a}$  таково, что криволинейный интеграл по любой непрерывной кусочно-гладкой кривой, соединяющей  $A_0$  с произвольной точкой  $A \in \Omega$ , не зависит от этой кривой, а зависит только от точки  $A$ . Таким образом, существует определенная на  $\Omega$  функция  $V(A)$  такая, что

$$\int_{\Gamma_{A_0 A}} (P dx + Q dy + R dz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Чтобы доказать, что  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$  в точке  $A$ , будем рассуждать следующим образом. Точку  $A_0$  соединим с  $A$  специальной кривой  $\Gamma_{A_0A} \subset \Omega$  (см. рис. 76), которая заканчивается некоторым отрезком  $A_1A$ , параллельным оси  $x$ . Этот отрезок мы продолжим до некоторой точки  $A_2$ . Таким образом, переменная точка  $A$  отрезка  $A_1A_2$  имеет постоянные координаты  $y$  и  $z$  и только одну переменную координату  $x$ . Кривую  $\Gamma_{A_0A}$  представим в виде суммы кривых

$$\Gamma_{A_0A} = \Gamma_{A_0A_1} + \Gamma_{A_1A},$$

и тогда

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\Gamma_{A_0A}} (ads) = \int_{\Gamma_{A_0A_1}} (ads) + \int_{\Gamma_{A_1A}} (ads) = \\ &= K + \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $K = \int_{\Gamma_{A_0A_1}} (ads)$  — постоянная, не изменяющаяся при

движении точки  $A$  по отрезку  $A_1A_2$ , а  $A_1 = (x_1, y, z)$ . Надо учесть, что уравнения отрезка  $A_1A_2$  можно записать в параметрическом виде (через параметр  $t$ )  $x = t, y = y, z = z$ , откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_{A_1A}} Q dy = \int_{x_1}^x Q(t, y, z) \cdot 0 dt = 0,$$

$$\int_{\Gamma_{A_1A}} R dz = \int_{x_1}^x R(t, y, z) \cdot 0 dt = 0.$$

Итак, мы получили равенство (3), верное, какова бы ни была точка  $(x, y, z)$  отрезка  $A_1A_2$ . Здесь  $y, z$  фиксированы, а  $x$  может изменяться. Так как под интегралом по  $t$  в правой части (3) стоит непрерывная функция от  $t$ , то

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt = P(x, y, z).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Omega),$$

вводя специальные кривые  $\Gamma_{A_0 A} \subset \Omega$ , оканчивающиеся отрезком, параллельным оси  $y$  в одно случае и параллельном оси  $z$  в другом.

**Пример 2.** Вычислим работу, которую совершает сила  $\mathbf{a}$ , определенная в примере 1, вдоль пути, соединяющего точки  $(1, 2, 2)$  и  $(3, 0, 4)$ .

Сила  $\mathbf{a}$  имеет потенциальную функцию

$$U(x, y, z) = -1/r = -1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

на области  $\Omega$ , представляющей собой пространство без нулевой точки. Поэтому криволинейный интеграл не зависит от пути.

В силу формулы (1) интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль любого (кусочно-гладкого) пути  $\Gamma \subset \Omega$ , соединяющего точки  $(1, 2, 2)$  и  $(3, 0, 4)$ , равен

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) &= U(3, 0, 4) - U(1, 2, 2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} - \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Итак, искомая работа вектора  $\mathbf{a} = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$  равна  $-\frac{2}{15}$ .

**3.4.3. Ротор вектора.** Возникает вопрос, как узнать, имеет ли вектор  $\mathbf{a}$  потенциальную функцию на данной области  $\Omega$ . Для этого введем некоторые новые понятия.

Введем символический вектор  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ . Его

называют *оператором Гамильтона*<sup>1</sup>.

*Ротором вектора  $\mathbf{a}$*  называется вектор

<sup>1</sup> У. Р. Гамильтон (1805–1865) – английский механик и математик.

$$\begin{aligned} \operatorname{rota} = \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \end{aligned}$$

Таким образом, можно сказать, что ротор вектора  $\mathbf{a}$  равен векторному произведению символического вектора (оператора Гамильтона) на вектор  $\mathbf{a}$ .

Следующие две теоремы дают ответ на поставленный выше вопрос.

**Теорема 2.** *Если вектор  $\mathbf{a}$  имеет на  $\Omega$  потенциальную функцию  $U$ , имеющую вторые непрерывные частные производные, то*

$$\operatorname{rota} = 0.$$

В самом деле, по условию теоремы

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0$$

на  $\Omega$ , что и требовалось доказать.

Обратное утверждение тоже верно, но, вообще говоря, для односвязных областей.

Область  $\Omega$  называется *односвязной*, если любую, принадлежащую к ней замкнутую кусочно-гладкую кривую  $\gamma$  можно стянуть в точку, принадлежащую  $\Omega$ . При этом в процессе стягивания  $\gamma$  все время должна принадлежать к  $\Omega$ .

В этом определении достаточно считать, что кривые  $\gamma$  самонепересекающиеся. Такие кривые являются границами соответствующих односвязных областей  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ .



Примерами односвязных областей могут служить все пространство или шар без его границы (сферической поверхности).

С другой стороны, все пространство (трехмерное!), из которого выкинута прямая, есть пример неодносвязной области.

**Теорема 3.** Если область  $\Omega$  односвязная и на ней задан вектор  $\mathbf{a}$  с непрерывно дифференцируемыми компонентами, для которого

$$\operatorname{rota} = 0,$$

то вектор  $\mathbf{a}$  имеет на  $\Omega$  потенциальную функцию (потенциал).

В трехмерном случае теорема 3 следует из формулы Стокса<sup>1</sup>, которая будет доказана в § 3.15; в двумерном (плоском) случае она следует из формулы Грина<sup>2</sup>, которая будет доказана в § 3.7.

В плоском случае мы рассматриваем поле вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad ((x, y) \in \Omega),$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — непрерывные функции на области  $\Omega$  плоскости.

Функция  $U(x, y)$  называется потенциальной для вектора  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$ , если

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega).$$

Изложенные выше факты верны и для плоскости. Надо только всюду опустить  $z$  и считать, что  $R \equiv 0$ .

В плоском случае определение односвязной области сохраняется. Обратим внимание, что плоскость (двумерное пространство), из которой выкинута точка, не есть односвязная область.

**Пример 3.** Вектор  $\mathbf{a}$  с компонентами

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

имеет непрерывные частные производные на области  $G$ , представляющей собой плоскость с выкинутой нулевой точкой.

Если записать вектор  $\mathbf{a}$  в виде

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

то отсюда видно, что

<sup>1</sup> Д. Стокс (1819–1903) — английский физик и математик.

<sup>2</sup> Д. Грин (1793–1841) — английский математик.

$$\operatorname{rota} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Легко проверить, что в данном случае

$$\operatorname{rota} = 0 \quad \text{на } (G).$$

Область  $G$  (плоскости!) не односвязна. Она не удовлетворяет условию теоремы 3, и сама теорема, как мы увидим, для нее неверна.

В самом деле, кривая  $\gamma$  (окружность)

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

очевидно, замкнута и принадлежит к  $G$ . Криволинейный интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль  $\gamma$  равен

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\mathbf{a} ds) &= \int_{\gamma} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Мы видим, что нашлась замкнутая кривая  $\gamma \subset G$ , вдоль которой интеграл от  $\mathbf{a}$  не равен нулю.

Это показывает на основании теоремы 1, что на  $G$  не существует потенциальной функции для рассматриваемого здесь вектора  $\mathbf{a}$ .

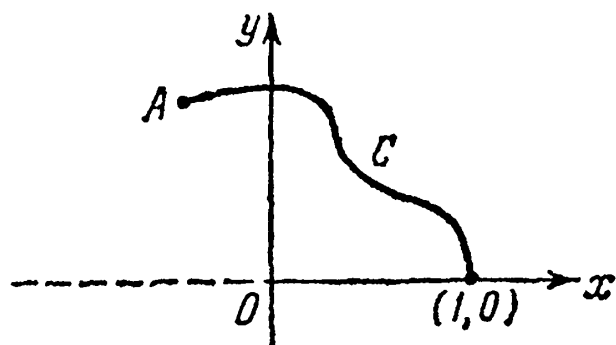


Рис. 77

С другой стороны, если из плоскости  $x, y$  выкинуть отрицательную полуось  $x$  или, как говорят, произвести разрез плоскости по отрицательной полуоси  $x$ , то оставшееся множество, которое мы обозначим через  $G_1$  (рис. 77), будет односвязным, и так как на  $G_1$   $\operatorname{rota} = 0$ , то на основании теоремы 3 на  $G_1$  уже существует потенциальная функция вектора  $\mathbf{a}$ . Эту функцию можно записать следующим образом:

Эту функцию можно записать следующим образом:

$$U(A) = U(x, y) = \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

где  $C \subset G_1$  — ориентированная кривая, соединяющая некоторую начальную фиксированную точку  $A_0$ , например

$(1, 0)$ , и переменную точку  $A = (x, y) \in G_1$  (см. рис. 77).

Заметим, что кривая  $C$  не должна пересекать отрицательную полуось  $x$ .

### § 3.5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Надо решить дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

на области  $\Omega$  плоскости  $(x, y)$ , где функции  $P$  и  $Q$  непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega$$

т. е. условию

$$\operatorname{rota} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

для вектора  $a = (P, Q)$ .

Но тогда в силу теоремы 3, § 3.4, если область  $\Omega$  односвязна, то вектор  $a$  имеет на  $\Omega$  потенциальную функцию  $U(x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \quad (x, y) \in \Omega.$$

Можно сказать, что существует на  $\Omega$  функция  $U(x, y)$  дважды дифференцируемая такая, что ее полный дифференциал есть левая часть уравнения (1). Поэтому это уравнение называют *уравнением в полных дифференциалах*.

Приравнивая функцию  $U(x, y)$  произвольной постоянной, получим общий интеграл (см. с. 17) данного дифференциального уравнения (1).

$$U(x, y) = C$$

Функцию  $U(x, y)$ , обращающуюся в нуль в заданной точке  $A_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ , можно получить, вычислив интеграл от вектора  $a = (P, Q)$  по какой-либо непрерывной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma_{A_0 A} \subset \Omega$ , соединяющей точку  $A_0$  с переменной точкой  $A = (x, y)$ .

Особенно простые вычисления получим, когда  $\Omega$  есть прямоугольник (см. рис. 78):

$$\Delta = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Достичь точки  $A$  из точки  $A_0$  можно путем  $A_0BA$ , и тогда придется проделать следующие вычисления:

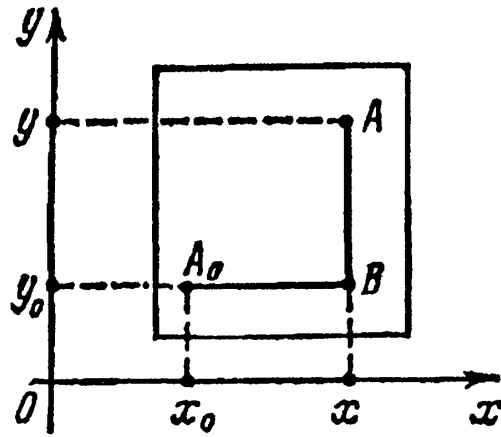


Рис. 78

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_{C_{A_0B}} (Pdx + Qdy) + \int_{C_{BA}} (Pdx + Qdy) = \\
 &= \int_{x_0}^x P(u, y_0) du + \int_{y_0}^y Q(x, v) dv,
 \end{aligned}$$

потому что

$$\int_{C_{A_0B}} Q dy = 0, \quad \int_{C_{BA}} P dx = 0.$$

В данном случае ( $\Omega = \Delta$ ) легко видеть, что  $U(x, y)$  есть потенциальная функция для вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} Q(x, u) du = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} P(x, u) du = \\
 &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y),
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y Q(x, v) dv = Q(x, y).$$

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение

$$(x^\alpha + y^{\beta+1})dx + (\beta + 1)xy^\beta dy = 0, \quad (7)$$

где  $\alpha, \beta$  — действительные числа, в области  $\Omega$  точек  $(x, y)$ , имеющих положительные координаты ( $x > 0, y > 0$ ). Здесь

$$M(x, y) = x^\alpha + y^{\beta+1}, \quad N(x, y) = (\beta + 1)xy^\beta,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (\beta + 1)y^\beta, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (\beta + 1)y^\beta,$$

т. е.  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  на  $\Omega$ ,

где  $\Omega$  – односвязная область. Поэтому

$$\operatorname{rota} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

и, следовательно, по теореме 3 § 3.4 существует функция  $U(x, y)$ , полным дифференциалом которой является левая часть (7). Эту функцию можно получить по формуле (5):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (u^\alpha + y_0^{\beta+1}) du + \int_{y_0}^y (\beta + 1) xv^\beta dv = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy_0^{\beta+1} - x_0y_0^{\beta+1} + xy^{\beta+1} - xy_0^{\beta+1} = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения (7) в  $\Omega$  есть функция  $U(x, y)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} = C,$$

где  $C$  – произвольная константа. При  $\alpha = -1$  общее решение находится из уравнения

$$\ln|x| + xy^{\beta+1} = C.$$

### § 3.6. Ориентация плоской области

На рис. 79 и 80 в плоскости изображены две различные прямоугольные системы координат. Различие этих систем заключается в том, что невозможно, передвигая их в плоскости, совместить их так, чтобы совпали одновременно их положительные оси  $x$  и положительные оси  $y$ .

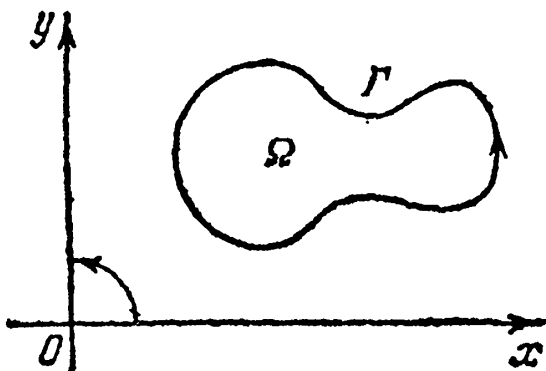


Рис. 79

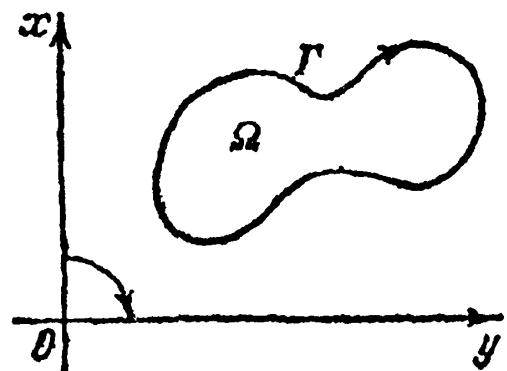


Рис. 80

Система на рис. 79 характерна тем, что поворот на  $90^\circ$  положительного луча  $x$  около начала координат *против часовой стрелки* приводит к совмещению его с положительным лучом  $y$ .

Система же на рис. 80 характерна тем, что поворот на  $90^\circ$  положительного луча  $x$  около начала приводит к совмещению его с положительным лучом  $y$ , только если этот поворот совершается *по часовой стрелке*.

Будем называть *простым контуром* замкнутую само-непересекающуюся непрерывную кусочно-гладкую ориентированную кривую  $\gamma$ .

Рассмотрим в плоскости ограниченную область  $\Omega$ , граница которой  $\Gamma$  состоит из конечного числа не пересекающихся попарно простых контуров:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N.$$

Если  $N = 1$ , т. е. если граница  $\Omega$  есть один простой контур ( $\Gamma = \gamma_1$ ), то область  $\Omega$  называется *односвязной*. Например, область  $\Omega$  на рис. 79 и 80 односвязна.

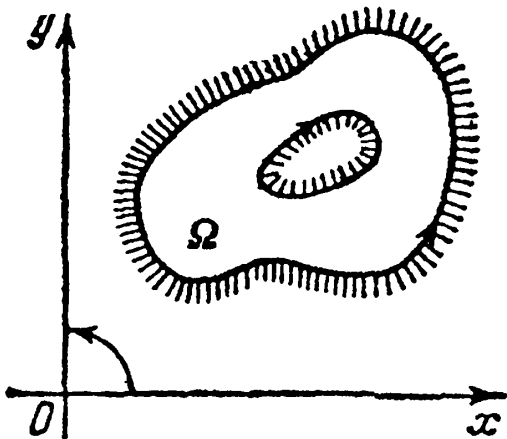


Рис. 81

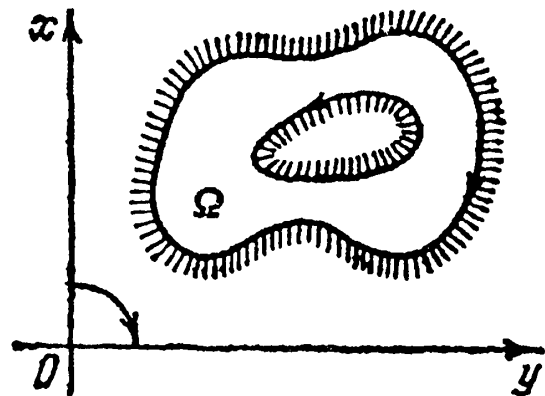


Рис. 82

Если  $N = 2$ , как это имеет место на рис. 81 и 82, область  $\Omega$  называется *двусвязной*.

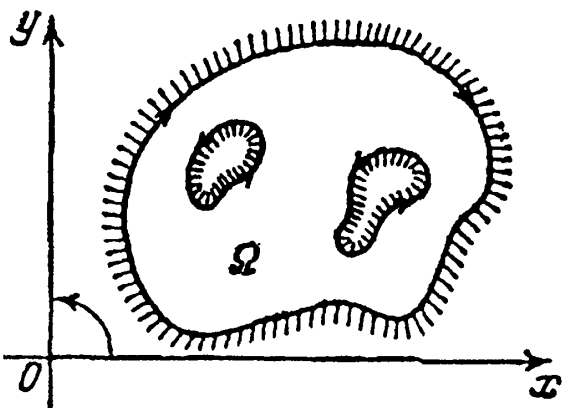


Рис. 83

При произвольном  $N$  область  $\Omega$  называется  *$N$ -связной*. Область  $\Omega$  на рис. 83 *трехсвязна*.

В случае системы координат, изображенной на рис. 79 (или рис. 81, или рис. 83), область  $\Omega$ , так же как ее граница  $\Gamma$  называется *ориентированной положительно* или *отрицательно* в зависимости от того, остается ли  $\Omega$  слева или справа при движении по  $\Gamma$  в направлении стрелки.

Соответственно в случае системы координат на рис. 80 (или рис. 82) область  $\Omega$ , так же как ее граница  $\Gamma$ , называется ориентированной положительно или отрицательно в зависимости от того, остается ли  $\Omega$  справа или слева при движении по  $\Gamma$  в направлении стрелки.

Например, области  $\Omega$  на рис. 79–82 ориентированы положительно, а область  $\Omega$  на рис. 83 ориентирована отрицательно.

Если  $\Omega$  ориентирована положительно, то  $\Omega_-$  обозначает ту же область, ориентированную отрицательно.

Полезно следующее соглашение. Пусть  $\Omega$  – область в плоскости  $x, y$ ,  $\Omega_+$  – область  $\Omega$ , ориентированная положительно, и  $\Omega_-$  – область  $\Omega$ , ориентированная отрицательно. Тогда по определению

$$\iint_{\Omega_+} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

$$\iint_{\Omega_-} f(x, y) dx dy = - \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

где справа стоят обычные двойные интегралы по  $\Omega$  от  $f(x, y)$ .

### § 3.7. Формула Грина

Для достаточно общих плоских областей  $\Omega$  с положительно ориентированной границей  $\gamma$  справедлива формула

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy), \quad (1)$$

называемая формулой Грина. Здесь предполагается, что

$Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, P, \frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ .

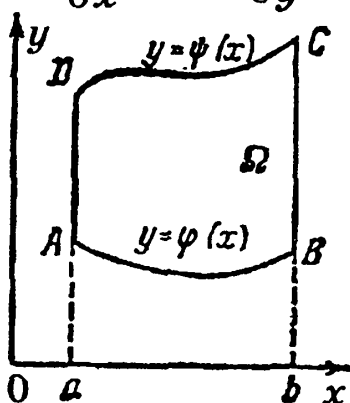


Рис. 84

Начнем с того, что рассмотрим плоскую область  $\Omega$ , изображенную на рис. 84, которую мы будем называть элементарной  $H_y$ -областью. Снизу и сверху  $\Omega$  ограничена кусочно-гладкими кривыми, имеющими соответственно уравнения

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

$$\varphi(x) \leq \psi(x), \quad (a \leq x \leq b).$$

С боков  $\Omega$  ограничена отрезками пря-

мых параллельных оси ординат. Отметим, что эти отрезки могут вырождаться в точку.

Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  состоит из четырех частей:

$$\Gamma = \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC}.$$

Для такой области  $\Omega$  имеют место равенства (пояснения ниже, ориентировано положительно)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]] dx = \\ &= - \int_b^a P[x, \psi(x)] dx - \int_a^b P[x, \varphi(x)] dx = \\ &= - \int_{\Gamma_{CD}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{DA}} P(x, y) dx - \\ &- \int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство. Кривая  $\Gamma_{CD}$  имеет параметрические уравнения (с параметром  $x$ )

$$x = x, \quad y = \psi(x).$$

При этом значению  $x = b$  соответствует точка  $C$ , а значению  $x = a$  — точка  $D$ . Кривая  $\Gamma_{AB}$  определяется уравнениями

$$x = x, \quad y = \varphi(x).$$

Значению  $x = a$  соответствует точка  $A$  и значению  $x = b$  — точка  $B$ . Наконец, отрезок  $BC$  имеет уравнения  $x = b$ ,  $y = y$  (с параметром  $y$ ). Вдоль этого отрезка  $dx = 0$ , поэтому на самом деле

$$\int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = 0.$$

Аналогично интеграл по отрезку  $DA$  равен нулю:

$$\int_{\Gamma_{DA}} P(x, y) dx = 0.$$

Итак, мы доказали, что



$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \quad (2)$$

Эта формула распространяется на любую область  $\Omega$ , которую можно разрезать на конечное число элементарных  $H_y$ -областей. Такую область будем называть просто  $H_y$ -областью.

В самом деле, пусть  $\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j$ , где  $\Omega_j$  — элементарные

$H_y$ -области с границей  $\gamma_j$ , которые будем считать ориентированными положительно (рис. 85). Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \sum_{j=1}^N \iint_{\Omega_j} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \\ &= \sum_{j=1}^N - \int_{\gamma_j} P dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Пояснения требует третье равенство.

Здесь важно отметить, что, если два контура  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  ( $i \neq j$ ) имеют общий кусок  $\gamma$ , то он как часть  $\gamma_i$  и как часть  $\gamma_j$  ориентирован противоположно, и потому криволинейные интегралы от  $P$  по  $\gamma$  в обоих случаях отличаются лишь знаком — их сумма равна нулю. Если учесть это, то

сумма  $\sum_{j=1}^N$  в цепи (3) сведется к сумме криволинейных

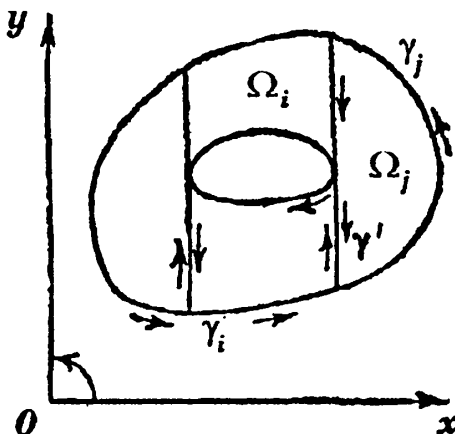


Рис. 85

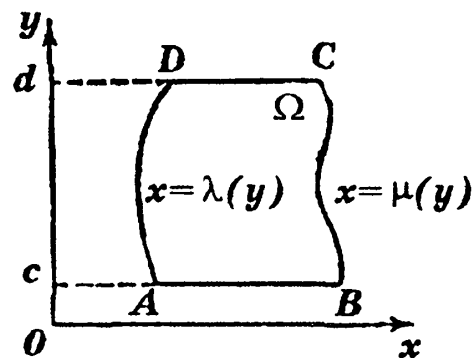


Рис. 86

интегралов по кускам  $\gamma_j$ , принадлежащим к  $\Gamma$ , равной интегралу по контуру  $\Gamma$ .

По аналогии можно ввести понятие *элементарной  $H_x$ -области*. В этом случае  $\Omega$  ограничена слева и справа кусочно-гладкими кривыми (рис. 86)

$$x = \lambda(y), \quad x = \mu(y), \quad \lambda(y) \leq \mu(y) \quad (c \leq y \leq d).$$

Сверху и снизу  $\Omega$  ограничена отрезками прямых параллельных оси  $x$ .

Можно также сказать, что элементарная  $H_x$ -область определяется так же, как элементарная  $H_y$ -область, только роль  $y$  теперь играет  $x$ .

Для элементарной  $H_x$ -области  $\Omega$  получаем (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(\mu(y), y) - Q(\lambda(y), y)] dy = \\ &= \int_c^d Q(\mu(y), y) dy + \int_d^c Q(\lambda(y), y) dy = \\ &= \int_{\Gamma_{BC}} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q(x, y) dy = \int_{\Gamma_{BC}} Q dy + \int_{\Gamma_{CD}} Q dy + \\ &+ \int_{\Gamma_{DA}} Q dy + \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

так как  $dy = 0$  на отрезках  $CD$  и  $AB$ , то и

$$\int_{\Gamma_{CD}} Q dy = \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = 0.$$

Формула (4) также распространяется на любую область  $\Omega$ , которую можно разрезать на конечное число элементарных  $H_x$ -областей. Такую область будем называть просто  *$H_x$ -областью*.

Итак, мы доказали предложение:

**Теорема 1.** *Если область  $\Omega$  является одновременно  $H_x$ - и  $H_y$ -областью, то для нее имеет место формула Грина.*

Для доказательства достаточно вычесть из равенства (4) равенство (3), которые справедливы для области  $\Omega$ , обладающей указанными свойствами.

Примерами областей, одновременно являющихся  $H_x$ - и  $H_y$ -областями, могут служить область

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x^2 < y < 1 \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

и эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Более того, эти области являются элементарными  $H_x$ - и  $H_y$ -областями.

**Замечание 1.** Можно доказать более общее утверждение. Если область  $\Omega$  ограничена произвольным замкнутым кусочно-гладким самонепересекающимся контуром  $\Gamma$ , то для нее верна формула Грина (1).

**Следствие.** Если плоская область  $\Omega$  односвязна и на ней задан непрерывно дифференцируемый вектор

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

для которого

$$\text{rota} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0,$$

то  $\mathbf{a}$  имеет на  $\Omega$  потенциал (т. е. имеет место в плоском случае теорема 3 § 3.4).

В самом деле, зададим произвольный самонепересекающийся непрерывный кусочно-гладкий контур  $\gamma \subset \Omega$ , ориентированный положительно (рис. 87).

Он служит границей некоторой области  $\omega \subset \Omega$ . Согласно теореме (формуле) Грина (см. замечание 1)

$$\int (Pdx + Qdy) = \iint_{\omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\omega} 0 dx dy = 0,$$

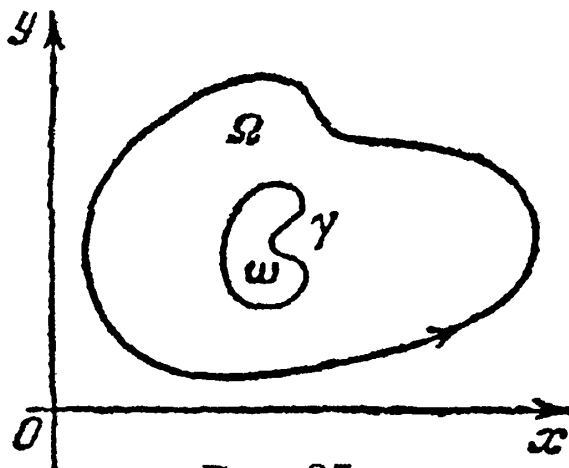


Рис. 87

и так как  $\gamma \subset \Omega$  — произвольный замкнутый самонепересекающийся контур, то на основании теоремы 1 § 3.4 вектор  $\mathbf{a}$  имеет потенциал на  $\Omega$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Так как двойной интеграл от единичной функции по области  $\Omega$  равен площади (мере) области

$\Omega$ , то, выбирая функции  $P$  и  $Q$  так, чтобы  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ , мы получим различные выражения площади области  $\Omega$  через криволинейный интеграл:

$$m\Omega = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy).$$

В частности, при  $P = -y/2$ ,  $Q = x/2$  получаем

$$m\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy). \quad (5)$$

**П р и м е р.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$x = acost, \quad y = bsint \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Согласно формуле (5) имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (absin^2 t + abcos^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

### § 3.8. Интеграл по поверхности первого рода

Пусть гладкая поверхность  $S$  определяется уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi \mathbf{i} + \psi \mathbf{j} + \chi \mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega \leftrightarrow S, |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  — непрерывно дифференцируемые на  $\Omega$  функции. Символ  $\Omega \leftrightarrow S$  обозначает взаимно однозначное соответствие между точками  $(u, v) \in \Omega$  и точками  $S$ .

Пусть, далее, на  $\bar{S}$  или в окрестности  $\bar{S}$  задана непрерывная функция  $F(x, y, z)$ . Произведем разбиение  $\Omega$  на части с кусочно-гладкими границами, пересекающиеся попарно разве что по своим границам. Каждой части  $\Omega_j$  соответствует определенная часть  $S_j$  поверхности  $S$ . Пусть  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  — произвольная точка на  $S_j$ . Составим сумму

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j|,$$

где  $|S_j|$  — площадь  $S_j$  (см. § 2.11). Предел ее

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j| = \int_S F(x, y, z) dS \quad (2)$$

называется интегралом по поверхности  $S$  (первого рода) функции  $F$  (или поверхностным интегралом первого рода).

Например, если на  $S$  распределена масса с плотностью распределения  $F$ , то интеграл от  $F$  по  $S$  будет выражать общую массу  $S$ .

Интеграл (2) вычисляется по следующей формуле:

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_{\Omega} F[\varphi, \psi, \chi] |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv, \quad (3)$$

где справа стоит обычный кратный интеграл  $(u, v) \in \Omega$ .

В частности, если гладкая поверхность  $S$  определяется уравнением  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in G$ ), где  $f$  непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на  $\bar{G}$ , то можно считать, что она задана параметрически через параметры  $x, y$ :

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y).$$

Тогда

$$\dot{r}_x \times \dot{r}_y = -f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$|\dot{r}_x \times \dot{r}_y| = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad (p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y})$$

и, следовательно,

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (4)$$

Докажем формулу (3). Пусть  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  и

$$x_j = \varphi(u_j, v_j), \quad y_j = \psi(u_j, v_j), \quad z_j = \chi(u_j, v_j),$$

$$(u_j, v_j) \in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, N).$$

Тогда (пояснения ниже)

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^N F(A_j) \int_{\Omega_j} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| dudv =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j |\Omega_j| = \\
&= \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j |\Omega_j| + \varepsilon_N \rightarrow \\
&\rightarrow \int_{\Omega} F[\varphi, \psi, \chi] |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| dudv \quad (\max d(\Omega_j) \rightarrow 0),
\end{aligned}$$

где знак  $| \cdot |_j$  обозначает, что в  $| \cdot |$  подставлена точка  $A_j$ , а  $| \cdot |_*$  — что в  $| \cdot |$  подставлена такая точка, чтобы выполнялась теорема о среднем для интеграла:

$$\int_{\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| dudv = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j |\Omega_j|$$

(см. теорему 3 § 2.3).

Ведь, очевидно, что  $(K > |F(A)|)$  для любого малого  $\eta$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_N| &= \left| \sum_{j=1}^N F(A_j) [|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j - |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j] |\Omega_j| \right| \leq \\
&\leq K\eta \sum_{j=1}^N |\Omega_j| = K\eta |\Omega|,
\end{aligned}$$

если только  $d(\Omega_j) < \delta$ , где  $\delta$  — зависящее от  $\eta$  число, потому что функция  $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$  равномерно непрерывна на  $\bar{\Omega}$ .

### § 3.9. Ориентация поверхности

Рассмотрим кусок гладкой поверхности  $S$ , определяемый векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}), \quad (1)$$

где функции  $\varphi, \psi, \chi$  — непрерывно дифференцируемые на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей и

$$|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0 \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}). \quad (2)$$

Как всегда, мы предполагаем, что имеет место взаимно однозначное соответствие  $\bar{\Omega} \rightleftarrows S$  между точками  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  и точками  $S$ .

Единичная нормаль в произвольной точке  $S$  определяется по формуле

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}). \quad (3)$$

Знаку «+» соответствует одна сторона поверхности  $S$  со щеткой выпущенных в ее сторону единичных нормальных векторов, непрерывно зависящих от  $(u, v)$ , а знаку «-» — другая сторона  $S$ .

Дадим определение. Если из каждой точки  $A$  гладкой поверхности  $S$  можно выпустить единичную нормаль  $\mathbf{n}(A)$  так, что полученная векторная функция от  $A$  будет непрерывной на всей поверхности  $S$ , то  $S$  называется ориентируемой поверхностью.

Функцию  $\mathbf{n}(A)$  называют еще непрерывным полем нормалей.

Поверхность, для которой определена такая функция  $\mathbf{n}(A)$ , называется ориентированной при помощи  $\mathbf{n}(A)$ . Если мы говорим, что  $S$  есть ориентированная поверхность, то тем самым считаем, что  $S$  обозначает не только поверхность (множество точек), но и тот факт, что на ней задана указанная непрерывная на  $S$  функция  $\mathbf{n}(A)$ . Говорят еще, что  $\mathbf{n}(A)$  задает определенную сторону ориентированной гладкой поверхности (куда выходит из  $S$  щетка единичных векторов  $\mathbf{n}(A)$ , непрерывно зависящих от  $A$ ).

Ту же поверхность, но ориентированную противоположным образом (щеткой единичных нормальных векторов, идущих в противоположном направлении) надо уже обозначать другой буквой. Две такие противоположно ориентированные поверхности удобно обозначать буквами  $S_+$  и  $S_-$ . Одна из них произвольно обозначается через  $S_+$ , а другая автоматически получает обозначение  $S_-$ .

Простейшим примером ориентируемой поверхности является плоскость  $xOy$ . Единичные векторы, перпендикулярные плоскости и идущие в положительном направлении оси  $z$ , определяют одну сторону плоскости, а векторы, идущие в отрицательном направлении оси  $z$ , — другую сторону плоскости ( $\mathbf{n}(A) = \pm \mathbf{k}$ ).

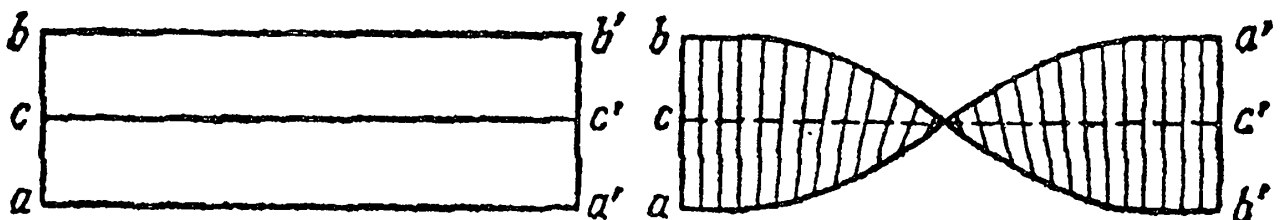


Рис. 88

Поверхность эллипсоида также ориентируема – выпущенный из какой-либо ее точки единичный вектор нормали во внешность эллипсоида, очевидно, непрерывно продолжается (однозначно!) на всю поверхность.

Этим поверхность ориентирована (определена *внешняя сторона эллипсоида*).

Другая, противоположная, ориентация этой поверхности определяется единичным нормальным к ней вектором, идущим внутрь эллипсоида (*внутренняя сторона эллипсоида*).

Выше мы видели, что если  $S$  есть гладкая поверхность, определенная параметрическими уравнениями (1) с указанными там свойствами, то она ориентируема. Знаку «+» в формуле (3) соответствует определенная ориентация  $S$ , а знаку «-» будет тогда соответствовать противоположная ориентация.

Вообще же существуют гладкие поверхности *не ориентируемые*.

Если прямоугольный лист  $abb'a'$  (рис. 88) перекрутить один раз и его стороны  $ab$ ,  $a'b'$  склеить так, чтобы точки  $a$ ,  $b'$  и  $b$ ,  $a'$  склеились попарно, то получим не ориентируемую поверхность (рис. 89), называемую *листом Мёбиуса*<sup>1</sup>.

На рис. 88 отмечен отрезок  $cc'$  – средняя линия прямоугольного листа бумаги. Этой линии на листе Мёбиуса соответствует замкнутая кривая  $cc'$ , у которой точки  $c$  и  $c'$  слились в одну точку. Выпустим из  $c$  единичную нормаль  $n(c)$  произвольным, по определенным образом. Раз направление  $n(c)$  выбрано (среди двух возможных), то этим уже детерминированно определяется выбор  $n(A)$  для всех точек  $A \in cc'$ , если мы хотим, чтобы вектор  $n(A)$  зависел от  $A$  непрерывно. Однако в точке  $c'$  вектор  $n(c')$  уже выбран, – ведь  $c$  и  $c'$  совпадают. Легко видеть, что если точку средней линии прямоугольника непрерывно двигать от  $c$  к  $c'$ , то единичная нормаль  $n(A)$ , где  $A$  – точка листа Мёбиуса будет стремиться к  $-n(c)$ , а не к  $n(c)$  и, следовательно, вектор-функция  $n(A)$  оказывается разрывной в точке  $c = c' \in S$ . Итак, лист Мёбиуса неориентируем.

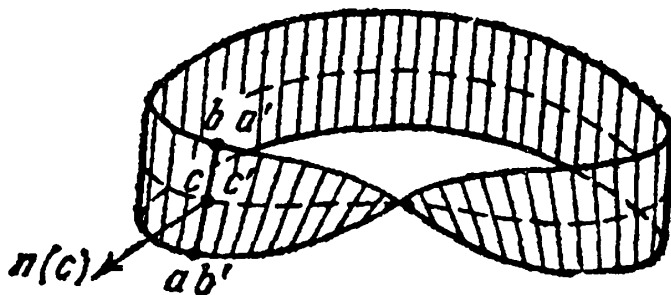


Рис. 89

<sup>1</sup> А. Ф. Мёбиус (1790–1868) – немецкий математик.



### § 3.10. Система координат и ориентация поверхности

В трехмерном пространстве имеются две существенно различные прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 90 и 91. Отличие друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем, чтобы в результате его оказались совмещенными точки  $O$  и одноименные положительные полуоси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обеих систем.

Первую систему (рис. 90) называют *правой*, вторую (рис. 91) – *левой*<sup>1</sup>.

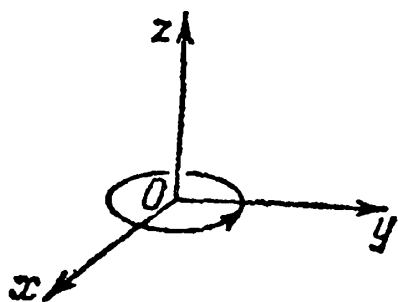


Рис. 90

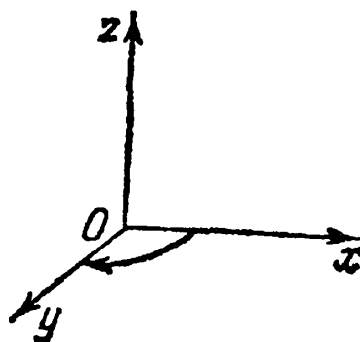


Рис. 91

Если смотреть снизу вверх вдоль положительной оси  $z$ , то для совмещения положительной оси  $x$  с положительной осью  $y$  в кратчайшем направлении в случае рис. 90 нужно вращать ось  $x$  в плоскости  $x, y$  слева направо (по часовой стрелке), а в случае рис. 91 – справа налево (против часовой стрелки).

С каждой из рассматриваемых двух систем естественно связать «штопор» – комбинацию, состоящую из единичного, направленного в положительном направлении оси  $z$ , вектора и перпендикулярного к оси  $z$  кружка (головки штопора), на границе которого (окружности) задано направление обхода от оси  $x$  к оси  $y$  в кратчайшем направлении.

Если в случае рис. 90 считать, что ось  $z$  есть ось винта (штопора), скрепленного с головкой и имеющего «правую нарезку», то, вращая головку в направлении стрелки, мы заставим штопор двигаться в направлении положительной оси  $z$  (*правый штопор*). Того же эффекта мы достигнем в случае рис. 91, если ось  $z$  будет осью винта, имеющего левую нарезку (*левый штопор*).

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 11.

Головка штопора может быть искривлена, т. е. может представлять собой кусок гладкой поверхности, не обязательно плоской, но такой, что ось  $z$  есть нормаль к этому куску в точке  $O$ . И в этом случае комбинация из такой головки, на которой задано направление обхода, и единичной нормали образует штопор – правый или левый.

Наконец, можно представить себе такой штопор правый или левый с нормальным вектором, идущим в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с осью  $z$ . Для дальнейшего будет важно представить себе следующую конструкцию. Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат (правая или левая) и ориентированная поверхность  $S$ . Таким образом, из каждой точки  $P \in S$  выпущена единичная нормаль  $n(P)$ , непрерывно зависящая от  $P$ . Шар  $V(P)$  достаточно малого радиуса с центром в точке  $P$  высекает из поверхности  $S$  некоторый связный кусок  $\sigma(P)$ , содержащий точку  $P$ . На контуре (на краю)  $\gamma(P)$  этого куска определим направление обхода так, чтобы вектор  $n(P)$  и кусок  $\sigma(P)$  образовали штопор, ориентированный так же, как данная система координат, т. е. если система координат правая (левая), то и штопор должен быть правым (левым).

Если поверхность  $S$  имеет край  $\Gamma$ , то созданная конструкция естественным образом приводит к определенному направлению обхода на  $\Gamma$  (рис. 92). Обратим, например, внимание на точку  $A$  контура  $\Gamma$ . В ней направление обхода по  $\Gamma$  и по замкнутому искривленному принадлежащему  $S$  кружочку  $\gamma$  совпадают.

Если бы данная поверхность была ориентирована противоположным образом, а система координат осталась прежней, то определенные выше направления обхода нужно было бы заменить на противоположные.

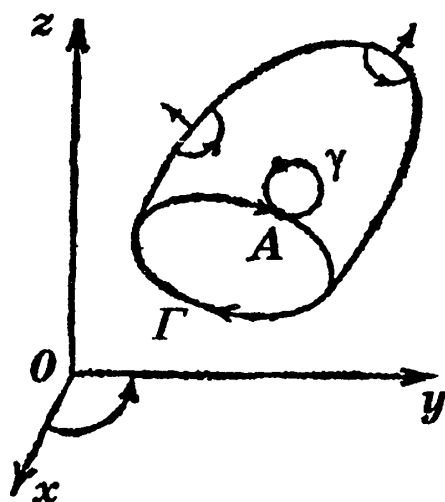


Рис. 92

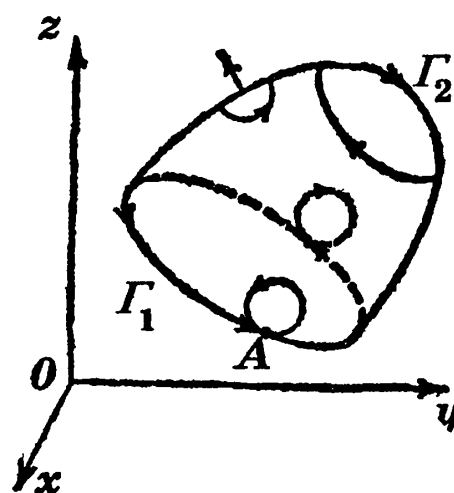


Рис. 93

На рис. 93 нарисована ориентированная поверхность с краем, состоящим из двух замкнутых гладких кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Отметим еще следующий факт. Пусть ориентированная гладкая поверхность  $S$  разрезана на две ориентированные так же поверхности  $S_1, S_2$  гладкой дугой  $h$  (рис. 94). Тогда направления обхода контуров  $S_1$  и  $S_2$  вдоль дуги  $h$  противоположны.

Это замечание будет руководящим для того, чтобы правильно определить понятие ориентированной кусочно-гладкой поверхности, т. е. поверхности, которую можно разрезать на конечное число гладких кусков с кусочно-гладкими краями.

*Кусочно-гладкая поверхность  $S$  называется ориентированной, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обхода контуров этих кусков согласованы в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.*

На рис. 95 нарисован куб, поверхность которого ориентирована при помощи ее внешней нормали.

Пусть  $S$  есть ориентированная гладкая поверхность; таким образом, из каждой точки  $A \in S$  выпущена единичная нормаль  $n(A)$  к  $S$  в  $A$ , непрерывно зависящая от  $A$ . Пусть  $\sigma$  есть гладкий кусок  $S$ . Будем считать, что  $\sigma$  есть вектор, скалярная величина которого равна площади  $|\sigma|$  куска  $\sigma$ , а направление определяется вектором  $n(A)$ , где  $A$  есть какая-либо точка  $\sigma$ . Таким образом,  $\sigma = |\sigma|n(A)$ .

Этим, конечно, вектор  $\sigma$  однозначно не определен. Однако если диаметр  $d(\sigma)$  мал, то направление  $n(A)$  не

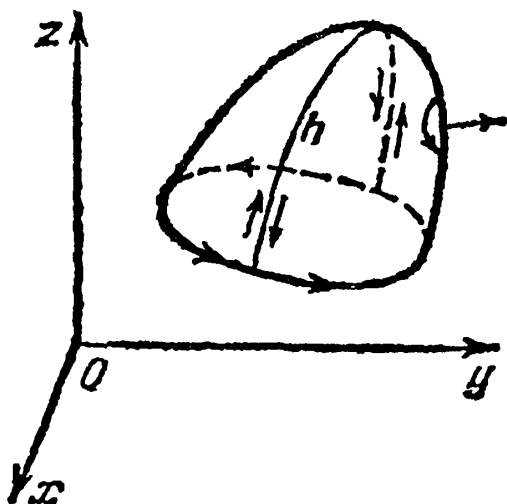


Рис. 94

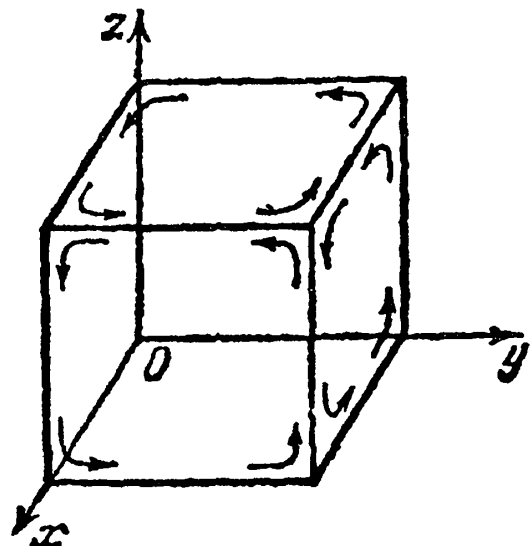


Рис. 95

выходит за пределы некоторого малого конуса, и если  $\sigma$  есть переменный кусок, постоянно содержащий фиксированную точку  $A_0$ , то, очевидно,  $\mathbf{n}(A) \rightarrow \mathbf{n}(A_0)$  ( $d(\sigma) \rightarrow 0$ ), где  $d(\sigma)$  есть диаметр  $\sigma$ , независимо от того, как выбиралась точка  $A \in \sigma$  для каждого  $\sigma$ .

Дифференциальный элемент ориентированной поверхности  $S$  в точке  $A \in S$  естественно считать вектором  $dS = \mathbf{n}(A)dS$ , который, таким образом, равен произведению дифференциального элемента площади  $S$  в точке  $A$  на вектор единичной нормали  $\mathbf{n}(A)$ , определяющей ориентацию  $S$ .

Если  $S$  задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi \mathbf{i} + \psi \mathbf{j} + \chi \mathbf{k} \quad ((u, v) \in \bar{G}),$$

то  $\mathbf{n}(A)$  определяется одним из двух равенств

$$\mathbf{n}(A) = \pm \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} \quad (1)$$

и скаляр  $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| dudv$ . А вектор

$$dS = \pm (\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v) dudv. \quad (2)$$

Если мы хотим, чтобы при преобразовании параметров  $(u, v)$  в параметры  $(u', v')$  не изменялся знак в этих выражениях, то

нужно, чтобы якобиан преобразования  $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$  был положительным. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(A) &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}} = \\ &= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u', v')} \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u', v')} \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u', v')} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{D(u', v')}{D(u, v)}}{\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|} = \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}}{|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|} \cdot \text{sign} \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \quad 1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интег-

Таким образом, формула (1) со знаком «+»! для единичной нормали  $n(A)$  (а вместе с ней и формула (2)) инвариантна только по отношению к преобразованиям параметров, имеющих положительный якобиан.

Относительно произвольной ориентированной в пространстве  $x, y, z$  поверхности не имеет смысла говорить, что она ориентирована положительно или отрицательно. Другое дело, если поверхность плоская, принадлежащая к одной из координатных плоскостей.

Ориентированная область  $G$ , принадлежащая к плоскости  $xOy$ , называется *положительной (отрицательной)* и обозначается символом  $G_+(G_-)$ , если соответствующая области  $G$  единичная нормаль  $n(A) = k(n(A) = -k)$ , где  $k$  — орт оси  $z$ . Это определение согласуется с определением, данным в § 3.6. Нужно только считать там, что мы смотрим на плоскость  $xOy$  со стороны положительных  $z$ .

Если заменить в этом определении  $x, y$  соответственно на  $y, z$  или  $z, x$ , а также  $k$  — соответственно на орт  $i$  оси  $x$  или орт  $j$  оси  $y$ , то получим определения для областей, принадлежащих плоскостям  $yOz, zOx$ .

Для областей  $G_-$ , принадлежащих  $xOy$  или  $yOz$  или  $zOx$ , надо соответственно  $k, i, j$  заменить на  $-k, -i, -j$ .

### § 3.11. Интеграл по ориентированной плоской области

В § 3.6 мы ввели понятие *интеграла от  $f$  по ориентированной области, принадлежащей плоскости  $xOy$* . Именно,

$$\int_{G_+} f \, dx \, dy = \int_G f \, dx \, dy = - \int_{G_-} f \, dx \, dy.$$

Полезность этих определений можно видеть из следующего факта. Зададим две плоскости, где заданы прямоугольные системы координат  $x, y$  и  $x', y'$ , одинаково ориентированные. Пусть  $G$  обозначает ориентированную область плоскости  $x, y$  с кусочно-гладкой (ориентированной) границей  $\Gamma$ , и пусть непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{G}) \quad (1)$$

отображает взаимно однозначно область  $G$  на область  $G'$  плоскости  $x', y'$  и  $\Gamma$  на границу  $\Gamma'$  области  $G'$ . Будем предполагать, что якобиан

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \quad (\text{на } G).$$

При этом преобразовании обход  $\Gamma$  индуцирует на  $\Gamma'$  вполне определенный обход и  $G'$  можно считать ориентированной областью.

Если  $D > 0$ , то при переходе от  $\Gamma$  к  $\Gamma'$  ориентация  $\Gamma'$  не меняется.

Если же  $D < 0$ , то обходы  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  противоположны.

Из сказанного следует, что для любой функции  $f(x, y)$ , непрерывной на замыкании  $\bar{G}$  ориентированной измеримой области  $G$ ,

$$\iint_G f \, dx \, dy = \iint_{G'} f \cdot \frac{D(x, y)}{D(x', y')} \, dx' \, dy',$$

где  $G'$  обозначает соответствующую  $G$  ориентированную область. В этой формуле замены переменных якобиан не пишется под знаком абсолютной величины.

Поясним сказанное относительно связи ориентации  $\Gamma$  со знаком  $D$ . В прямоугольной системе координат  $x, y$  зададим два неколлинеарных вектора  $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2)$  и  $\mathbf{a}'' = (a''_1, a''_2)$ . Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 \\ a'_2 & a''_2 \end{vmatrix}$$

положителен<sup>1</sup>, то это указывает на тот факт, что система  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}''$  ориентирована так же, как оси  $x, y$  (рис. 96). Если же  $\Delta < 0$ , то система  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}''$  ориентирована противоположно (рис. 97).

Преобразование (1) отображает прямоугольную сетку плоскости  $x, y$  в криволинейную (рис. 98–100). При этом могут иметь место два характерных отличных случая отображений, изображенных на рис. 99 и 100.

Квадрат  $ABCD$  переходит в криволинейный параллелограмм

$A'B'C'D'$ , вектор  $\overrightarrow{AB}$  переходит с точностью до бесконечно

малых высшего порядка в вектор касательной к дуге  $\overset{\cup}{A'B'}$  в

точке  $A'$ , определяемой вектором  $\left( \frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x} \right)$ , а вектор  $\overrightarrow{AD}$  —

вектор касательной к дуге  $\overset{\cup}{A'D'}$  в точке  $A'$ , определяемой

вектором  $\left( \frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y} \right)$ . Если определитель  $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$ ,

<sup>1</sup> См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 12.

то расположение этих векторов будет таким, как на рис. 99, а это приводит к тому, что направления обхода у  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  совпадают, а следовательно, и обхода  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ .

Если же  $D < 0$ , то расположение касательных векторов к

$A'B'$  и  $A'D'$  друг к другу меняется на противоположное, что влечет за собой (рис. 100) тот факт, что обходы у  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  делаются противоположными.

Аналогично определяются интегралы для областей  $G_+$  и  $G_-$ , определенных на других координатных плоскостях  $yz$ ,  $zx$ .

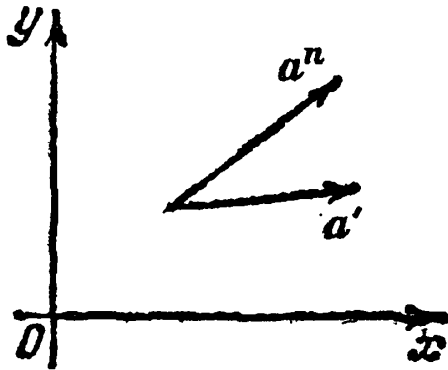


Рис. 96

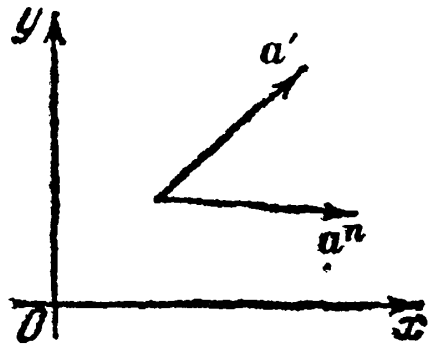


Рис. 97

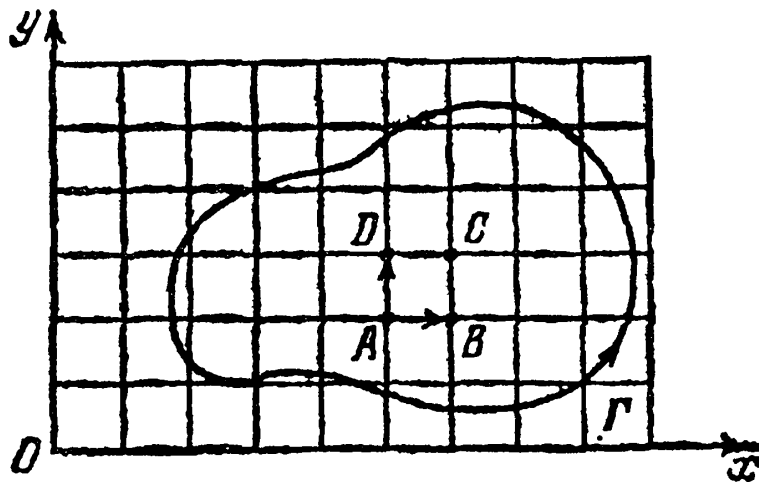


Рис. 98

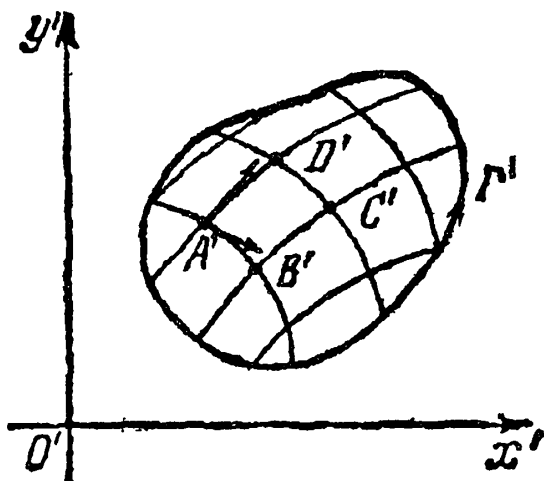


Рис. 99

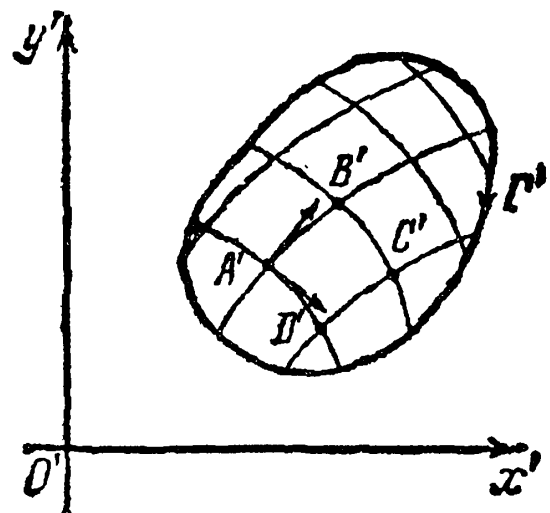


Рис. 100

### § 3.12. Поток вектора через ориентированную поверхность

В трехмерном пространстве  $E = E_3$  с прямоугольной системой координат  $x, y, z$  дана область  $H$  и на ней определено поле непрерывного вектора

$$a(x, y, z) = Pi + Qj + Rk.$$

В  $H$  задана ориентированная гладкая поверхность  $S^*$

$$r = r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k \quad ((u, v) \in \Omega, |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0), \quad (1)$$

где  $\Omega$  – область с кусочно-гладкой границей в плоскости параметров  $(u, v)$  и  $\varphi, \psi, \chi$  – непрерывно дифференцируется на  $\bar{\Omega}$  функции. Будем считать, что единичная нормаль к  $S^*$  определяется векторным равенством (в связи со сказанным см. (1), (2) § 3.10)

$$n(A) = \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|}. \quad (2)$$

Тогда косинусы углов нормали  $n = n(A)$  с осями  $x, y, z$  выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \mathcal{K} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \cos(n, y) = \mathcal{K} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \\ \cos(n, z) &= \mathcal{K} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \mathcal{K} = 1/|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем еще обозначать через  $S$  ту же поверхность, но не ориентированную – с нее снята ориентация.

Примером указанного поля может служить поле скоростей  $a$  жидкости, текущей в области  $H$ . Имеется в виду стационарное течение, т. е. такое, что ее скорость в произвольной точке  $A \in H$  зависит от  $A$ , но не зависит от времени  $t$ .

Поставим задачу. Надо определить количество  $W$  жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность  $S^*$ , в направлении  $n(A)$ , или, как еще можно сказать, в направлении ориентации  $S^*$  (рис. 101).

Для этого рассмотрим малый элемент  $dS$  поверхности  $S$ , содержащей некоторую точку  $A \in S$ . Количество проходящей через него жидкости в направлении  $n(A)$  в единицу времени, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно считать равным

$$a_n dS = (an)dS = (adS^*)$$



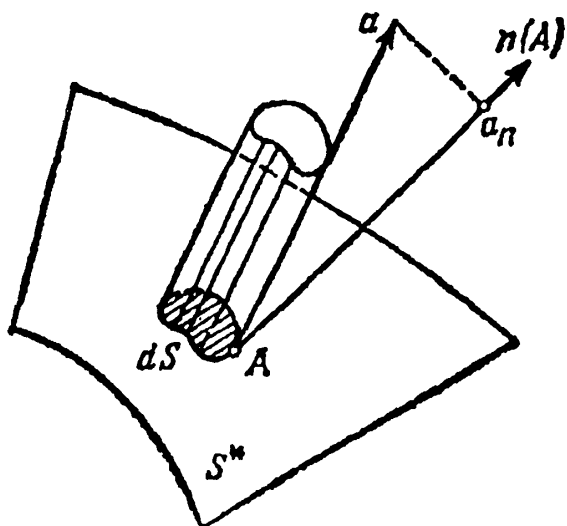


Рис. 101

$$(n = n(A), a = a(A)),$$

– произведению проекции  $a$  на направление нормали  $n(A)$  на площадь  $dS$  элемента. Это произведение мы записали двумя способами, используя равенство  $dS^* = n dS$ .

Искомое количество жидкости, проходящей в единицу времени через  $S^*$  равно интегралу первого рода

$$W = \int_S (an) dS, \quad (*)$$

от функции  $(an)$  по поверхности  $S$ .

Заметим, что  $(an)$  есть непрерывная функция от  $A \in \bar{S}$ , потому что по условию  $a$  и  $n$  – непрерывные вектор-функции от  $A \in \bar{S}$ . Это показывает, что интеграл первого рода (\*) существует (см. § 3.8).

Этот интеграл условились записывать еще и так:

$$W = \int_{S^*} (adS^*).$$

В таком виде его называют *интегралом второго рода*.

В общем случае, когда  $a$  есть произвольный непрерывный вектор, определенный на  $H$ , величину  $W$  называют потоком вектора  $a$  через ориентированную поверхность  $S^*$ .

*Потоком вектора  $a$  через ориентированную поверхность  $S^*$  называется величина, обозначаемая следующим образом:*

$$\int_{S^*} (adS^*)$$

и определяемая при помощи равенства

$$\int_{S^*} (adS^*) = \int_S (an) dS, \quad (4)$$

правая часть которого есть поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения

$$(an) = P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)$$

вектора  $a$  и единичной нормали, определяющей ориентацию  $S^*$ .

Так как  $(an)$  есть непрерывная функция от точки  $A \in S$ , то интеграл в правой части (4) первого рода по  $S$  существует, это было доказано в § 3.8. Выражение в левой части (4) называют *поверхностным интегралом второго рода*<sup>1</sup>.

Справедливо равенство

$$\int_S (an) dS = \int_S (P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)) dS = \\ = \iint_{\Omega} \left( P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) dudv, \quad (5)$$

где в правой части стоит обычный кратный (двойной) интеграл по области, в котором в  $P$ ,  $Q$  и  $R$  надо подставить вместо  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответствующие функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  от  $u$ ,  $v$ . Это равенство следует из (3) и формулы (3) § 3.8.

Часто удобно вычислить интеграл (5) в декартовых координатах. Покажем, к каким вычислениям это приводит в предположении, что гладкий кусок  $\bar{S}$  поверхности взаимно однозначно проектируется на измеримые части всех трех плоскостей координат. Гладкую поверхность можно разбить на конечное число таких кусков.

Итак, пусть гладкий кусок  $\bar{S}$  описывается любой из трех функций

$$\begin{aligned} x &= f_1(y, z) \quad ((y, z) \in \bar{S}_x), \\ y &= f_2(z, x) \quad ((z, x) \in \bar{S}_y), \\ z &= f_3(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{S}_z), \end{aligned}$$

непрерывных соответственно на проекциях  $\bar{S}$  на плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и имеющих непрерывные частные производные, вообще говоря, только внутри этих проекций  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  (измеримых множествах).

Обозначим еще через  $S_x^*$ ,  $S_y^*$ ,  $S_z^*$  соответствующие ориентированные проекции ориентированной поверхности  $S^*$  на плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

Обход контура  $S^*$  определяет при проектировании соответствующий обход площадок  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  (рис. 102). Нормаль  $n$  к  $S$  образует угол с осью  $z$ , косинус которого равен

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \left( p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f_3}{\partial y} \right),$$

<sup>1</sup> Другое обозначение интеграла второго рода см. ниже — правую часть (6), (7).

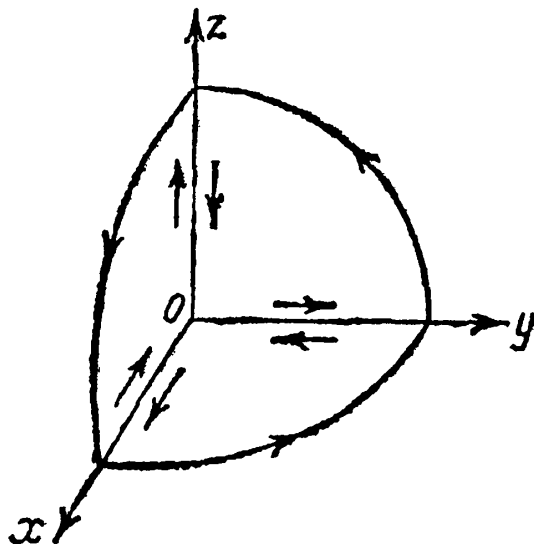


Рис. 102

где надо взять «+» или «-» в зависимости от ориентации  $S^*$ . Имеем (см. (4) § 3.8 и § 3.10)

$$\begin{aligned}
 \int_S R \cos(n, z) dS &= \\
 &= \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\
 &= \pm \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \int_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \\
 &= \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \tag{6}
 \end{aligned}$$

где предпоследний интеграл взят по ориентированной площадке  $S_z^*$  (см. § 3.8). Что касается последнего интеграла в этой цепи, то его надо рассматривать как обозначение предпоследнего. Это так называемый *интеграл второго рода*. Чтобы его вычислить, надо подставить  $f_3(x, y)$  вместо  $z$  и проинтегрировать по ориентируемой проекции  $S_z^*$ .

Из § 3.8 мы знаем, что  $\int_{S_z^*} = \pm \int_{S_z}$ , где надо взять «+»

или «-» в зависимости от того, будет ли площадка  $S_z^*$  ориентирована положительно или отрицательно (см. также § 3.6). Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении остальных двух интегралов:

$$\int_S P \cos(n, x) dS = \int_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z) dy dz = \int_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

$$\int_S Q \cos(n, y) dS = \int_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z) dz dx = \int_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Мы доказали, что поток вектора  $\mathbf{a}$  через ориентированную поверхность  $S^*$ , определяемую нормалью  $\mathbf{n}$ , может быть вычислен по формуле

$$\int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS =$$

$$= \int_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy). \quad (7)$$

Если поверхность  $S^*$  разрезана на конечное число частей,  $S^* = \sum S_k^*$ , каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то чтобы вычислить поток  $\mathbf{a}$  через  $S^*$ , можно вычислить потоки  $\mathbf{a}$  через каждый из кусков  $S_k^*$  указанным способом и сложить их.

Шаровая поверхность с центром в нулевой точке естественно разрезывается плоскостями координат на восемь кусков, обладающих указанным свойством.

Как уже было отмечено выше, выражение справа в (7) называют *интегралом по поверхности второго рода*.

**З а м е ч а н и е 1.** Если ориентированная поверхность  $S = G$  в пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$  есть кусок координатной плоскости (ее уравнение  $x_j = 0$  при некотором  $j = 1, 2, 3$ ), то поток вектора  $\mathbf{a}$  через  $G_+$  есть просто двойной интеграл от соответствующей проекции вектора  $\mathbf{a}$  на соответствующую ось. В частности, если  $G_+$  есть часть плоскости  $x_3 = 0$  с нормалью  $\mathbf{n}(A) = +\mathbf{k}$ , то  $(\cos(n, z) = 1)$

$$\int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = \int_S R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{G_+} R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int_G R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2.$$

Обратно, если нам дан, например, двойной интеграл вида

$$\int_G f(x, y) dx dy,$$

то его можно трактовать как поток вектора  $\mathbf{a}$  через площадку  $G_+$ , у которого проекция на ось  $z$  равна  $R(x, y, z) = f(x, y)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Интеграл второго рода от вектора  $\mathbf{a}$  по ориентированной поверхности  $S^*$  меняет знак при перемене ориентации поверхности.

В самом деле, пусть  $S_-^*$  обозначает ту же поверхность, что и  $S^*$ , но ориентированную противоположно. Тогда

$$\int_{S^*} (\mathbf{a} dS^*) = \int_S (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS,$$

а

$$\int_{S_-^*} (\mathbf{a} dS_-^*) = \int_S (\mathbf{a}, -\mathbf{n}) dS = - \int_S (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = - \int_{S^*} (\mathbf{a} dS^*).$$

### § 3.13. Дивергенция.

#### Теорема Гаусса–Остроградского<sup>1</sup>

Пусть  $E$  есть трехмерное пространство, где задана прямоугольная система координат  $x, y, z$  и  $G \subset E$  – область с кусочно-гладкой границей  $S$ , на которой определено поле вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in G). \quad (1)$$

Будем предполагать, что  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны на  $\bar{G}$ , откуда следует, что для вектора  $\mathbf{a}$  имеет смысл непрерывная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad ((x, y, z) \in \bar{G}), \quad (2)$$

называемая *дивергенцией вектора  $\mathbf{a}$* .

Легко видеть, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} \quad (\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)),$$

<sup>1</sup> К. Ф. Гаусс (1777–1855) – выдающийся немецкий математик. М. В. Остроградский (1801–1861) – выдающийся русский математик.

т. е. дивергенция равна скалярному произведению символического вектора  $\nabla$  (оператора Гамильтона) (см. § 3.4) и вектора  $\mathbf{a}$ .

Будем считать, что поверхность  $S$  ориентирована при помощи единичной нормали  $\mathbf{n}$ , направленной во внешность  $G$ .

Целью нашей будет доказать равенство

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a} dG = \int_S (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS \quad (3)$$

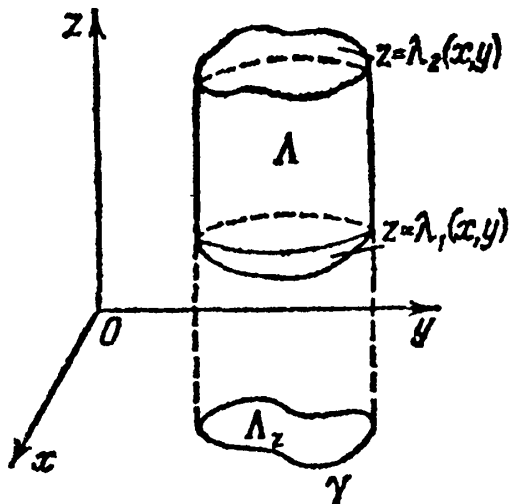


Рис. 103

при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на  $G$ . Это равенство называют *формулой Гаусса–Остроградского* по имени математиков, ее доказавших.

Формула Гаусса–Остроградского говорит, что *объемный (тройной) интеграл от дивергенции вектора по области  $G$  равен потоку вектора через границу этой области, ориентированную в направлении ее внешней нормали.*

Начнем с того, что рассмотрим область  $\Lambda$ , изображенную на рис. 103, которую мы будем называть элементарной  $H_2$ -областью. Снизу и сверху  $\Lambda$  ограничена поверхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  с кусочно-гладкими краями, определяемыми соответственно уравнениями

$$z = \lambda_1(x, y), \quad z = \lambda_2(x, y) \quad (\lambda_1(x, y) \leq \lambda_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Lambda}_z),$$

где  $\Lambda_z$  – плоская область с кусочно-гладкой границей  $\gamma$ , а  $\lambda_1, \lambda_2$  непрерывны на  $\bar{\Lambda}_z$  и имеют непрерывные частные производные на открытом множестве  $\Lambda_z$ . С боков  $\Lambda$  ограничена цилиндрической поверхностью  $\sigma^*$  с направляющей  $\gamma$  и образующей параллельной оси  $z$ .

Пусть  $S^*$  есть граница  $\Lambda$ , ориентированная при помощи внешней к  $\Lambda$  нормали (пояснения ниже). Тем самым нижний и верхний куски  $\sigma_1^*, \sigma_2^*$ , так же как боковая поверхность  $\sigma^*$  области  $\Lambda$ , соответственно ориентированы. Для области  $\Lambda$  имеют место равенства (пояснения ниже)

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial z} d\Lambda = \iint_{\Lambda_z} dx dy \int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Lambda_z} \{R(x, y, \lambda_2(x, y)) - R(x, y, \lambda_1(x, y))\} dx dy = \\
&= \iint_{\sigma_{2,z}^*} R(x, y, \lambda_2(x, y)) dx dy + \iint_{\sigma_{1,z}^*} R(x, y, \lambda_1(x, y)) dx dy = \\
&= \iint_{S^*} R(x, y, z) dx dy. \tag{4}
\end{aligned}$$

Нормаль  $\mathbf{n}$  к  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$  образует с осью  $z$  соответственно тупой и острый углы, поэтому проекции  $\sigma_{1,z}^*$ ,  $\sigma_{2,z}^*$  кусков  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$  на плоскость  $z = 0$  ориентированы первая отрицательно, а вторая положительно. Это обосновывает переход от третьего члена цепи (4) к четвертому. К сумме, составляющей четвертый член, можно формально добавить интеграл

$$\iint_{\sigma^*} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

потому что  $\cos(\mathbf{n}, z) = 0$  вдоль  $\sigma^*$ . Но тогда полученная сумма трех интегралов равна интегралу, стоящему в качестве последнего члена цепи (4) (потoku вектора  $(0, 0, R)$  через  $S^*$ ).

Этим мы доказали теорему Гаусса–Остроградского для элементарной  $H_z$ -области и вектора  $(0, 0, R)$ .

Назовем теперь область  $G$   $H_z$ -областью, если ее замыкание  $\bar{G}$  можно разрезать на конечное число элементарных  $H_z$ -областей

$$\bar{G} = \sum_{k=1}^N \bar{G}_k$$

так, что нижние и верхние куски границы  $G_k$  суть части ориентированной границы  $S^*$  области  $G$ , и докажем, что для  $G$  и вектора  $(0, 0, R)$  тоже справедлива теорема Гаусса–Остроградского.

В самом деле, обозначим соответственно через  $S_{1,k}$ ,  $S_{2,k}$  нижние и верхние куски границ  $\bar{G}_k$  и через  $S_k$  – боковые куски  $G_k$ . Тогда (пояснения ниже)

$$\int_G \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{k=1}^N \int_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{k=1}^N \left( \int_{S_{1,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \int_{S_{2,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \int_{S_k^*} R(x, y, z) dx dy \right) = \\ &= \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

потому что интегралы по  $S_k^*$ , очевидно, равны нулю, а куски  $S_{1,k}^*$  и  $S_{2,k}^*$  составляют в совокупности поверхность  $S^*$ , либо только часть  $S^*$ , а остальная часть  $\sigma$  с  $S^*$  имеет нормаль в любой ее точке перпендикулярную к оси  $z$ . Но тогда интеграл по  $\sigma$  равен нулю.

По аналогии можно ввести понятия  $H_x$ -области и  $H_y$ -области. Например,  $H_x$ -область обладает тем свойством, что ее замыкание можно разрезать на конечное число замыканий элементарных  $H_x$ -областей. Элементарная же  $H_x$ -область определяется так же, как элементарная  $H_z$ -область, только роль  $z$  теперь играет  $x$ . По аналогии доказывается, что для  $H_x$ -области  $G$  имеет место равенство

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x} dG = \iint_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

т. е. формула Гаусса—Остроградского для вектора  $(P, 0, 0)$ , а для  $H_y$ -области  $G$  — формула

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial y} dG = \iint_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Если теперь  $G$  есть одновременно  $H_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ -область, то для нее, очевидно, верна теорема Гаусса—Остроградского для произвольного непрерывно дифференцируемого на  $\bar{G}$  вектора  $a = (P, Q, R)$ , т. е. верно равенство

$$\begin{aligned} &\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iint_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy), \quad (5) \end{aligned}$$

где интеграл справа есть интеграл по поверхности  $S^*$ , ориентированной внешней нормалью к  $G$ .



Если в формуле Гаусса—Остроградского положить  $P=x$ ,  $Q=y$ ,  $R=z$ , то получим выражение для объема области  $G$

$$|G| = \frac{1}{3} \iint_{S^*} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

через интеграл по ее ориентированной внешней нормалью границе  $S^*$ .

Области, с которыми приходится обычно иметь дело, являются одновременно  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ -областями.

**Пример 1.** Шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  есть  $H_z$ -область, даже элементарная  $H_z$ -область, потому что вся его внутренность ограничена двумя лежащими друг над другом гладкими на круге  $x^2 + y^2 < 1$  поверхностями

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

непрерывными на замкнутом круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ , имеющем гладкую границу. Очевидно, шар есть также  $H_x$  и  $H_y$ -область.

**Пример 2. Тор.** В плоскости  $x, y$  зададим окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $(b, 0)$  ( $0 < a < b$ ). Ее уравнение имеет вид  $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ . Вращение данной окружности как твердого тела в пространстве  $x, y, z$  вокруг оси  $y$  приводит к поверхности  $T$ , называемой *тором* (на рис. 104 показана половина тора). Уравнение тора в декартовых координатах имеет вид

$$(\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 = a^2.$$

Чтобы убедиться в том, что  $T$  есть  $H_y$ -область, достаточно поверхность  $T$  разделить на две части плоскостью  $x, z$ . Далее, плоскости  $x = b - a$ ,  $x = b + a$  пересекают  $T$

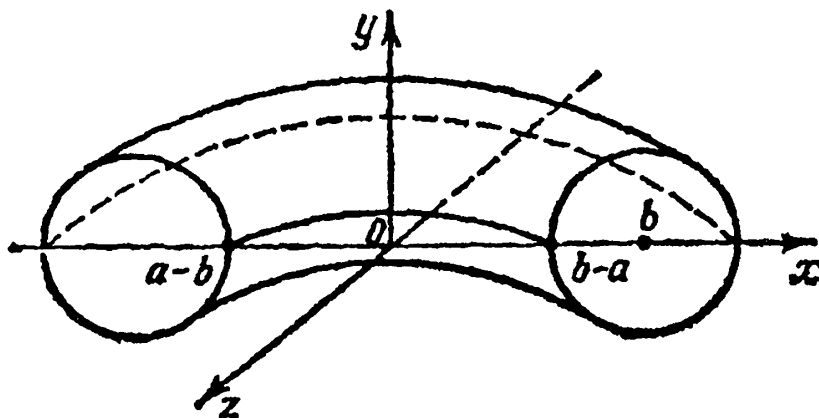


Рис. 104

на четыре элементарные  $H_z$ -области, а плоскости  $z=b-a$ ,  $z=a-b$  — на четыре элементарные  $H_x$ -области.

Формула Гаусса—Остроградского преобразует объемный интеграл в интеграл по поверхности.

Чтобы выяснить физический смысл понятия дивергенции, будем считать, что в  $G$  имеет место стационарное течение жидкости, скорость которой в произвольной точке  $(x, y, z)$  равна  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ . Зададим произвольную, но фиксированную точку  $A = (x, y, z) \in G$  и окружим ее шаром  $V_\varepsilon \subset G$  радиуса  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $S_\varepsilon^*$  есть его граница (шаровая поверхность), ориентированная посредством внешней нормали. Тогда на основании формулы Гаусса—Остроградского

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) = \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz.$$

Левая часть этого равенства выражает количество жидкости, вытекающее из  $V_\varepsilon$  (вовне  $S_\varepsilon$ ) за единицу времени. Применяя к правой его части теорему о среднем, получим

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) = |V_\varepsilon| \operatorname{div} \mathbf{a}_1, \quad (6)$$

где  $|V_\varepsilon|$  есть объем  $V_\varepsilon$ , а  $\mathbf{a}_1$  — скорость жидкости в некоторой точке из  $V_\varepsilon$ . Разделив обе части полученного равенства на  $|V_\varepsilon|$  и перейдя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим в силу непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ , что существует предел, равный дивергенции  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) \quad (7)$$

в точке  $(x, y, z)$ . Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  представляет собой производительность источников, непрерывно распределенных по  $G$  в точке  $A = (x, y, z)$ . Если в точке  $A$  (или всюду на  $G$ )  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , то это значит, что в  $A$  (или всюду на  $G$ ) производительность источников равна нулю. Если  $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ , то это значит, что на самом деле в соответствующей точке имеет место сток.

Из физических соображений ясно, что  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  есть инвариант относительно любых преобразований прямоугольных координат. Но это заключение можно сделать и на основании математических соображений.

Как мы знаем (см. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 18) скалярное произведение векторов есть инвариант при преобразованиях координат, поэтому и дивергенция (равная скалярному произведению символического вектора  $\nabla$  и вектора  $\mathbf{a}$ ) есть инвариант относительно преобразований прямоугольных координат. Конечно, мы считаем (по определению), что координаты символического вектора  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  преобразуются

по тем же формулам, что и координаты обычных векторов. Точнее, если формулы преобразования от координат  $(x_1, x_2, x_3)$  точки (вектора) в первой системе координат к ее координатам  $(y_1, y_2, y_3)$  во второй системе имеют вид

$$y_l = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} x_s \quad (l = 1, 2, 3) \quad (8)$$

где  $\alpha = (\alpha_{kl})$  — соответствующая ортогональная матрица, то

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Оператор Гамильтона применяется к дифференцируемой функции  $f$ . В результате мы получаем вектор

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right),$$

называемый, как мы знаем, *градиентом функции  $f$* . Функция  $f$  в этом исчислении считается скаляром. Таким образом,  $\nabla f = \text{grad} f$  есть произведение вектора  $\nabla$  на скаляр  $f$  — результат есть вектор.

В системе координат  $y_1, y_2, y_3$

$$\nabla f = \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial f}{\partial y_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \mathbf{j}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_3} \mathbf{k}_1,$$

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$  — орты системы  $y_1, y_2, y_3$ . При этом в силу (9)

$$\frac{\partial f}{\partial y_l} = \left( \alpha_{l1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{l2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{l3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (l=1, 2, 3). \quad (10)$$

Формулы (10) согласуются с правилами дифференцирования сложной функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ , у которой

$$x_s = \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} y_l \quad (s = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Формулы (11) являются обратными к формулам (8) ( $\alpha^{-1} = \alpha^*$ , т. е. координаты  $x_s$  выражаются через координаты  $y_k$  с помощью  $s$ -го столбца матрицы  $\alpha$ ).

Здесь мы получили формулы (10), пользуясь только символическим исчислением.

Теперь, если одно и то же поле вектора определено в двух прямоугольных системах координат  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$  соответственно функциями

$$\begin{aligned} a &= a_1(x_1, x_2, x_3)i + a_2(x_1, x_2, x_3)j + a_3(x_1, x_2, x_3)k = \\ &= b_1(y_1, y_2, y_3)i_1 + b_2(y_1, y_2, y_3)j_1 + b_3(y_1, y_2, y_3)k_1, \end{aligned}$$

где координаты  $(b_1, b_2, b_3)$  и  $(a_1, a_2, a_3)$  связаны по формулам (8), (11) (с заменой в них  $x, y$  на  $a, b$ ), то в одной и той же точке

$$\operatorname{div} a = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial b_l}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) b_l = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} b_l \right) = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial a_s}{\partial x_s}.$$

Таким образом, мы еще раз доказали инвариантность дивергенции при преобразованиях прямоугольных координат, пользуясь только символическим исчислением.

Формулу Гаусса—Остроградского можно записать в плоском случае, когда  $G$  есть область в плоскости  $x, y$  и

$$a(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

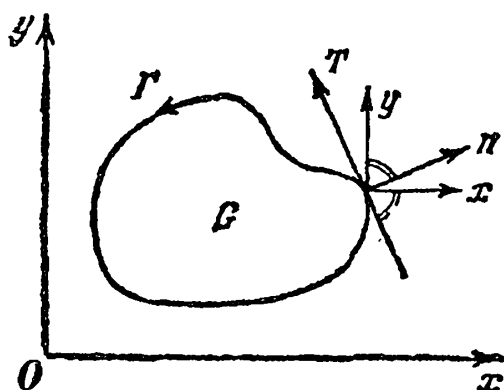
— определенное на ней поле. Если  $n(A)$  есть внешняя нормаль к кусочно-гладкому контуру  $\Gamma$  области  $G$  ( $A \in \Gamma$ ), то имеет место равенство

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (an) ds,$$

где  $ds$  — дифференциал дуги  $\Gamma$ .

Если считать, что направление касательной в точке  $\Gamma$  совпадает с положительным направлением обхода по  $\Gamma$ ,

вдоль которого исчисляется также длина дуги контура  $\Gamma$ , то (рис. 105)



$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos(T, y) = \frac{dy}{ds}, \\ \cos(n, y) &= \cos[\pi - (T, x)] = \\ &= -\cos(T, x) = -\frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Рис. 105

Поэтому

$$(\mathbf{an})ds = Pdy - Qdx,$$

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (Pdy - Qdx).$$

Если в этой формуле заменить соответственно  $P, Q$  на  $Q, -P$ , то мы приходим к формуле Грина, которая была получена в § 3.7.

### § 3.14. Соленоидальное поле

Поле (область)  $\Omega$  вектора  $\mathbf{a} = Pi + Qj + Rk$  называется *соленоидальным (трубчатым)*, если дивергенция  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$  равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \quad ((x, y, z) \in \Omega).$$

В силу теоремы Гаусса–Остроградского для соленоидального поля имеет место равенство

$$\iint_S (\mathbf{an})dS = \iiint_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx dy dz = 0$$

для любой замкнутой ориентированной (во вне  $\omega$ ) кусочно-гладкой поверхности  $S$ , являющейся границей области  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ , т. е. находящейся строго внутри  $\Omega$ .

В частности, если  $\omega$  находится внутри замкнутой поверхности  $S_2$  и вне замкнутой поверхности  $S_1$  ( $S = S_1 + S_2$ ), как на рис. 106, то

$$\iint_{S_1} (\mathbf{an})dS + \iint_{S_2} (\mathbf{an})dS = 0$$

или

$$\iint_{S_1} (\mathbf{an})dS = \iint_{S_2^-} (\mathbf{an})dS,$$

где  $S_2^-$  – та же поверхность, что  $S_2$ , но ориентированная противоположно (во внутрь  $\omega$ ).

Рассмотрим в  $\Omega$  область  $\omega$  специального вида (рис. 107) – трубку с границей  $S$ , состоящей из трех гладких кусков:

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

при этом по условию в любой точке  $S_3$  вектор  $\mathbf{a}$  касательный к  $S_3$ . Тогда

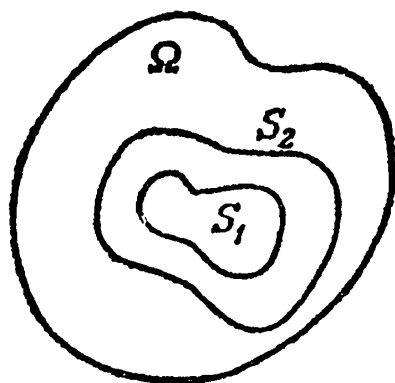


Рис. 106

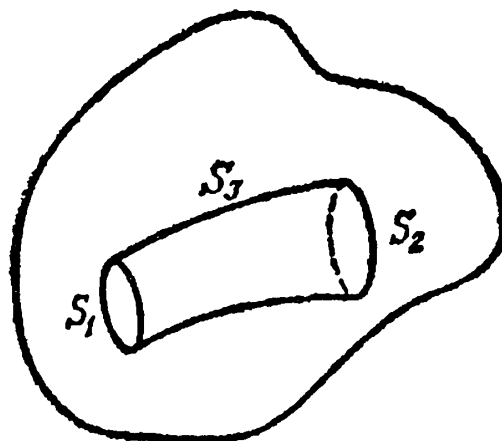


Рис. 107

$$\iint_{S_3} (\mathbf{a}\mathbf{n})dS = 0$$

и

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n})dS + \iint_{S_2} (\mathbf{a}\mathbf{n})dS = 0$$

или

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n})dS = \iint_{S_2^-} (\mathbf{a}\mathbf{n})dS.$$

Мы видим, что поток вектора  $\mathbf{a}$  через  $S_2^-$  равен потоку его через  $S_1$ , т. е. если, например,  $\mathbf{a}(x, y, z)$  есть скорость текущей в  $\Omega$  жидкости, то количество жидкости, втекающее в единицу времени в трубку, равно количеству вытекающей из трубки жидкости.

### § 3.15. Формула Стокса

Пусть в некоторой области пространства  $E_3$  задано поле непрерывно дифференцируемого вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

В § 3.4 мы определили понятие ротора вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\text{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Из векторной алгебры известно (см. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 18), что векторное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же

ориентацию, т. е. таких, что правая система переходит в правую, а левая – в левую. Поэтому  $\text{rota} = \nabla \times \mathbf{a}$  инвариантен относительно преобразований прямоугольных систем координат, не меняющих их ориентацию. Следовательно, мы можем, не вычисляя, сказать, что если наш вектор  $\mathbf{a}$  имеет в новой (также ориентированной) прямоугольной системе координат компоненты

$$\mathbf{a} = P_1(x', y', z')\mathbf{i}' + Q_1(x', y', z')\mathbf{j}' + R_1(x', y', z')\mathbf{k}',$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ & = \left( \frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'} \right) \mathbf{i}' + \left( \frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'} \right) \mathbf{j}' + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'} \right) \mathbf{k}', \end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  – единичные орты в системе  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

Если ориентированный контур  $\Gamma$  замкнут, то взятый вдоль него криволинейный интеграл от  $\mathbf{a}$  будем называть *циркуляцией вектора  $\mathbf{a}$  по  $\Gamma$*  и обозначать символом

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{l}) = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Здесь  $d\mathbf{l}$  есть направленный в положительном направлении касательной к  $\gamma$  вектор, длина которого равна дифференциалу дуги  $\Gamma$ .

Наша цель заключается в том, чтобы обосновать *формулу Стокса*

$$\iint_{S^*} (\text{rot} \mathbf{a} dS^*) = \iint_S (\mathbf{n} \text{rot} \mathbf{a}) dS = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{l}), \quad (1)$$

выражающую тот факт, что *поток вектора  $\text{rot} \mathbf{a}$  через ориентированную поверхность  $S^*$  равен циркуляции  $\mathbf{a}$  по контуру  $\Gamma$  этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации  $S^*$* . Отметим, что через  $S^*$  мы обозначили некоторым образом ориентированную поверхность  $S$ . Начнем с доказательства теоремы Стокса (т. е. формулы (1)) для гладкого куска, взаимно однозначно проектируемого на все три координатные плоскости.

Зададим ориентированный гладкий кусок  $S^*$  поверхности с кусочно-гладким краем  $\Gamma$  который можно записать тремя способами:

$$z = f_1(x, y) \quad (x, y) \in S_z, \quad x = f_2(y, z) \quad (y, z) \in S_x,$$

$$y = f_3(z, x) \quad (z, x) \in S_y.$$

Предполагается, таким образом, что любое из этих уравнений разрешается относительно любой из переменных, а функции  $f_1, f_2, f_3$  непрерывно дифференцируемы на соответствующих проекциях  $S$  на координатные плоскости. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} a) dS &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\mathbf{n}, y) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) \right\} dS. \quad (2) \end{aligned}$$

Выберем в правой части (2) члены, содержащие  $P$ . Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} & - \iint_S \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, y) \right\} dS = \\ &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) dS = \\ &= - \iint_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f_1(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{\Gamma_z} P(x, y, f_1(x, y)) dx = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Так как  $\operatorname{grad} (f_1(x, y) - z)$  ортогонален поверхности  $z = f_1(x, y)$ , то направляющие косинусы нормали в точке  $(x, y, f_1(x, y))$  пропорциональны координатам градиента:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y} : (-1) = \cos(\mathbf{n}, x) : \cos(\mathbf{n}, y) : \cos(\mathbf{n}, z).$$

Отсюда

$$\cos(\mathbf{n}, y) = - \frac{\partial f_1}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z).$$

что влечет первое равенство в цепи (3). Второе равенство следует из формулы (6) § 3.12 и правила дифференцирования сложной функции. Третье равенство следует из формулы Грина и, наконец, последнее следует из того, что уравнения контура  $\Gamma$  имеют вид



$x = \varphi(s), y = \psi(s), z = \chi(s) = f_1(\varphi(s), \psi(s))$ ,  
т. е. в обоих последних криволинейных интегралах в (3)

$$dx = \varphi'(s)ds$$

и на контуре  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} P(x, y, f_1(x, y)) &= \\ &= P(\varphi(s), \psi(s), f_1(\varphi(s), \psi(s))) = P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)), \end{aligned}$$

что равно  $P(x, y, z)$  на  $\Gamma$ .

По аналогии доказывается, что

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, x) \right) dS = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy, \quad (4)$$

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, y) \right) dS = \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz. \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) следует формула Стокса (1).

Мы доказали теорему Стокса для куска ориентируемой поверхности, одновременно проектирующегося на все три плоскости координат. Имеется еще один важный простой случай, который непосредственно не охвачен нашими рассуждениями. Мы имеем в виду тот случай, когда  $\sigma^*$  есть кусок, принадлежащий некоторой плоскости, параллельной одной из осей координат. Для такого куска теорема Стокса тоже верна. В этом можно убедиться непосредственными вычислениями, подобными (3). Но можно рассуждать так. Интегралы, входящие в формулу Стокса, инвариантны относительно преобразований прямоугольных координат, не меняющих ориентацию последних. Всегда можно подобрать преобразование этого типа так, что  $\sigma^*$  будет проектироваться на любую из плоскостей координат новой системы (например, совместим нашу плоскость с плоскостью, проходящей через точки  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ). А в этом случае теорема доказана.

Формула Стокса остается верной для любой ориентированной поверхности  $S^*$  с кусочно-гладким краем  $\Gamma$ , которую можно разбить при помощи кусочно-гладких линий на конечное число гладких кусков, проектирующихся на все три плоскости координат.

В самом деле, пусть  $S^* = \sigma_1^* + \dots + \sigma_N^*$  есть такое разбиение, и пусть  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  — соответственно ориентированные контуры  $\sigma_1^*, \dots, \sigma_N^*$ . Тогда, согласно доказанному выше,

$$\iint_S (\operatorname{rot} a d\sigma) = \sum_{j=1}^N \iint_{\sigma_j} (\operatorname{rot} a d\sigma) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (a dl) = \int_{\Gamma} (a dl),$$

потому что части интегралов  $\int_{\Gamma_j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ), берущихся

вдоль внутренних кусков  $\Gamma_j$  (не принадлежащих  $\Gamma$ ), проходятся два раза в противоположном направлении и дают эффект, равный нулю.

Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число треугольников (плоских), называется *полиэдральной* поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Сделаем еще одно замечание. Пусть  $\sigma_\varepsilon^*$  обозначает круглую определенным образом ориентированную площадку с центром в точке  $A = (x, y, z)$  радиуса  $\varepsilon$  с ориентирующим ее единичным вектором  $\mathbf{n}$  и  $\gamma_\varepsilon$  — ее ориентированный контур. Согласно формуле Стокса

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (a dl) = \int_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{n} \operatorname{rot} a) d\sigma_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n a d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \cdot \operatorname{rot}_n a_1,$$

где  $\operatorname{rot}_n a$  есть скалярная функция, равная проекции  $\operatorname{rot} a$  на направление  $\mathbf{n}$ , а  $\operatorname{rot}_n a_1$  есть значение этой функции в некоторой средней точке  $\sigma_\varepsilon$ . Отсюда следует, что значение функции  $\operatorname{rot}_n a$  в точке  $A$  равно

$$\operatorname{rot}_n a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\gamma_\varepsilon} (a dl), \quad (6)$$

где при предельном переходе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предполагается, что вектор  $\mathbf{n}$  неизменный. В любой правой (левой) системе координат правая часть (6) есть одно и то же число. Однако при замене правой системы на левую и неизменном  $\mathbf{n}$  направление обхода  $\sigma_\varepsilon$  изменяется на противоположное, что влечет изменение знака в правой части (6). Таким образом, мы убедились в инвариантности  $\operatorname{rot} a = \nabla \times a$  относительно преобразований прямоугольных координат, сохраняющих ориентацию последних.

**З а м е ч а н и е.** Приведем ряд формул с участием оператора Гамильтона  $\nabla$ , которые оказываются полезными в векторном анализе.

Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}), \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}, \operatorname{grad} f = \nabla f,$$

где  $f$  — скалярная функция, а  $\mathbf{a}$  — вектор.

$$1) \quad \operatorname{rot}[\operatorname{grad} f] \equiv \nabla \times \nabla f = 0,$$

так как символические векторы  $\nabla$  и  $\nabla f$  отличаются только скалярным множителем. Непосредственно этот факт доказан нами в теореме 2 § 3.4)

$$2) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv (\nabla, \nabla \times \mathbf{a}) = 0,$$

так как вектор  $\nabla$  ортогонален вектору  $\nabla \times \mathbf{a}$ .

$$3) \quad \operatorname{div}(f\mathbf{a}) \equiv (\nabla, f\mathbf{a}) = (\nabla f, \mathbf{a}) + f(\nabla, \mathbf{a}).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (\nabla, f\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = \\ &= f'_x P + f'_y Q + f'_z R + f(P'_x + Q'_y + R'_z) = \\ &= (\nabla f, \mathbf{a}) + f(\nabla, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

4) Легко проверить, что  $\operatorname{grad} fg = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$  или в символическом виде  $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$ . Таким образом, оператор  $\nabla$  действует на произведение двух функций как обычный оператор дифференцирования.

$$5) \quad \operatorname{rot}(f\mathbf{a}) = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{a}$$

или

$$\nabla \times f\mathbf{a} = f(\nabla \times \mathbf{a}) + \nabla f \times \mathbf{a}.$$

$$6) \quad \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$$

или

$$(\nabla, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \nabla \times \mathbf{b}).$$

$$7) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \Delta f,$$

где  $\Delta$  называется оператором Лапласа. Очевидно, что

$$(\nabla, \nabla f) = \Delta f.$$

# РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

## § 4.1. Тригонометрические ряды

Функция  $f(x)$  называется *периодической периода  $a$* , если она определена на всей действительной оси и для нее выполняется равенство

$$f(x + a) = f(x)$$

для всех  $x$ .

Например, тригонометрические функции

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots \quad (1)$$

имеют период  $2\pi$ .

На самом деле функции  $\cos kx$  и  $\sin kx$  для каждого натурального  $k$  имеют период  $2\pi/k$ . Таким образом  $2\pi/k < 2\pi$  при  $k > 1$ . Постоянная же  $y = 1$  имеет как угодно малый период. Однако все функции последовательности (1) имеют период  $2\pi$ .

Периодическая функция

$$s = f(t)$$

изображает периодическое движение (колебание) точки, имеющей в момент времени  $t$  координату  $s$  (на оси  $s$ ).

Функция (периода  $2l$ )

$$s = A \cos \left( \frac{k\pi}{l} t + \omega \right), \quad (2)$$

где  $A > 0$ ,  $l > 0$  и  $\omega$  — постоянные,  $k$  — натуральное, определяет *гармоническое колебание точки с амплитудой  $A$ , фазой  $\omega$  и частотой  $k$* .

Функция (2) имеет период  $2l/k$ , т. е. одно полное колебание происходит за промежуток времени  $2l/k$ . Количество же колебаний в единицу времени равно  $k/2l$ . Именно число  $k/2l$  нужно было бы назвать частотой колебания, но обычно *частотой* (колебания) называют число  $k$ .

Отметим, что функция

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \quad (\sqrt{a_k^2 + b_k^2} > 0),$$

где  $k$  — натуральное число, определяет гармоническое колебание, потому что

$$\begin{aligned} a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t &= \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \frac{k\pi}{l} t + \right. \\ &\left. + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \frac{k\pi}{l} t \right) = A_k \cos \left( \frac{k\pi}{l} t + \omega_k \right), \end{aligned}$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

а  $\omega_k$  определяется однозначно из соотношений

$$0 \leq \omega_k < 2\pi, \quad a_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \cos \omega_k, \quad b_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sin \omega_k.$$

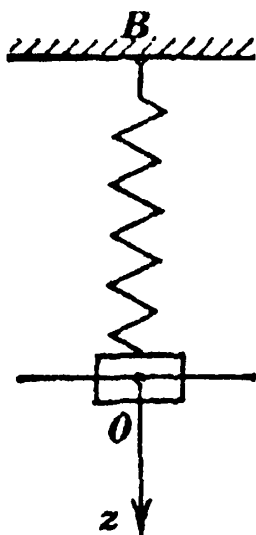


Рис. 108

Примером гармонического колебания может служить колебание пружинного маятника (рис. 108). Пусть пружина, подвешенная в точке  $B$ , имеет на нижнем ее конце груз массы  $m$ , координата центра тяжести которого в момент  $t = 0$  равна  $z = 0$ . Грузу в момент  $t = 0$  придается импульс  $z' = \mu$  по направлению оси  $z$ . В результате груз будет колебаться. Отклонение его от точки равновесия обозначим через  $z = z(t)$ . Так как сила, действующая на груз в первом приближении, равна по закону Ньютона  $mz'' = -kz$ , то

$$z'' + \nu^2 z = 0 \quad \left( \nu^2 = \frac{k}{m} \right).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$z = C_1 \cos vt + C_2 \sin vt,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Так как

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = \mu,$$

то

$$z = \frac{\mu}{v} \sin vt = A \cos \left( vt - \frac{\pi}{2} \right), \quad A = \frac{\mu}{v},$$

и мы получили, что центр тяжести груза совершает гармоническое колебание.

С периодическими движениями (колебаниями) приходится иметь дело в самых различных областях знания — в теории упругости, акустике, радиотехнике, электротехнике — и всюду простейшими периодическими движениями являются гармонические колебания.

Конечная сумма гармонических колебаний с данным периодом  $2l$  представляет собой сложное колебание

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right). \quad (3)$$

Нулевой член в этой сумме мы записали в виде  $a_0/2$ . Мы увидим, что это удобно.

Наконец, более сложное периодическое колебание (движение) можно получить как сумму сходящегося (для всех  $t$ ) ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right), \quad (4)$$

называемого *тригонометрическим рядом*.

Числа  $a_k$  и  $b_k$  называются *коэффициентами тригонометрического ряда* (4), а отдельные его слагаемые

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t$$

называются *членами ряда* (4) или его *гармониками* (соответствующими частоте  $k$ ).

**Пример 1.** На рис. 109–112 изображены графики первых четырех частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots$$

и график функции

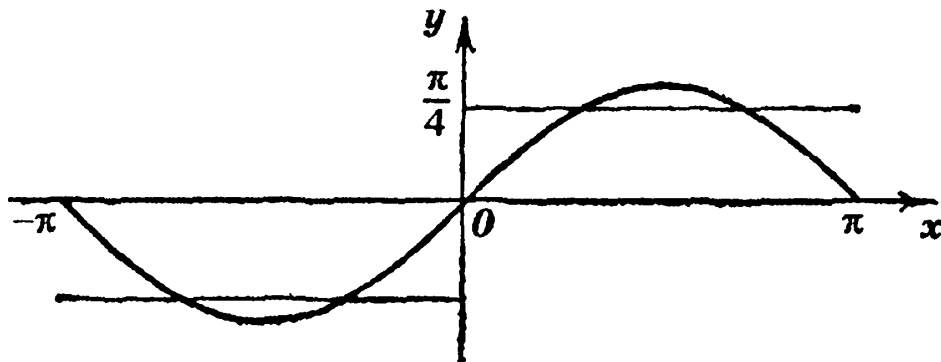


Рис. 109

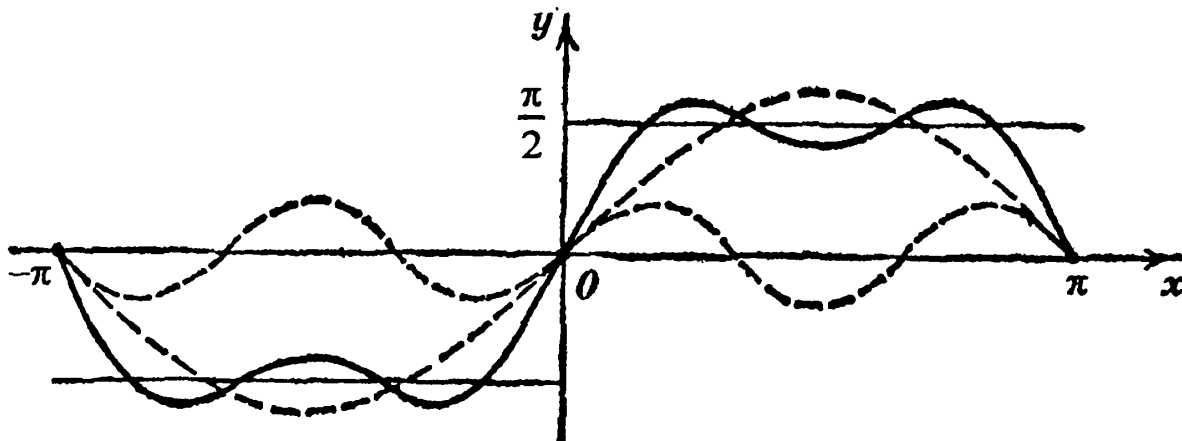


Рис. 110

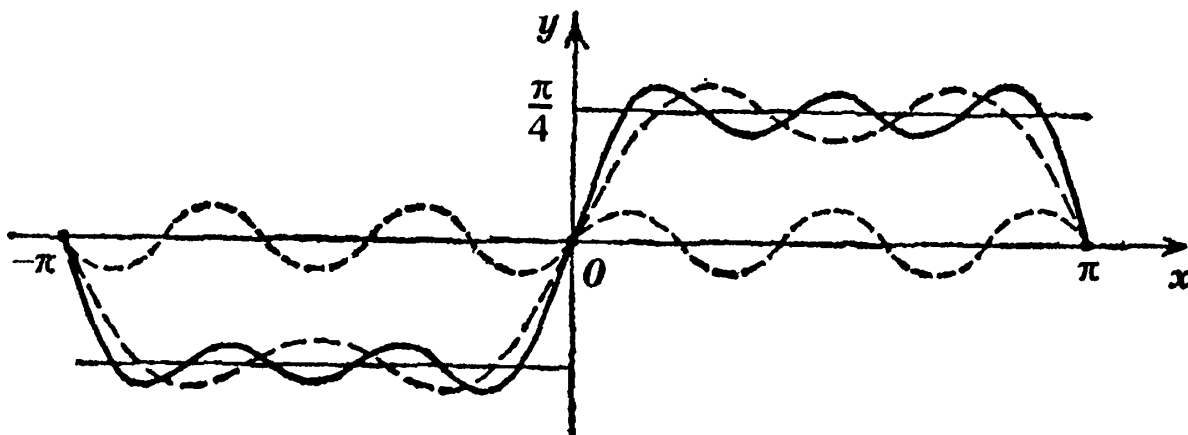


Рис. 111

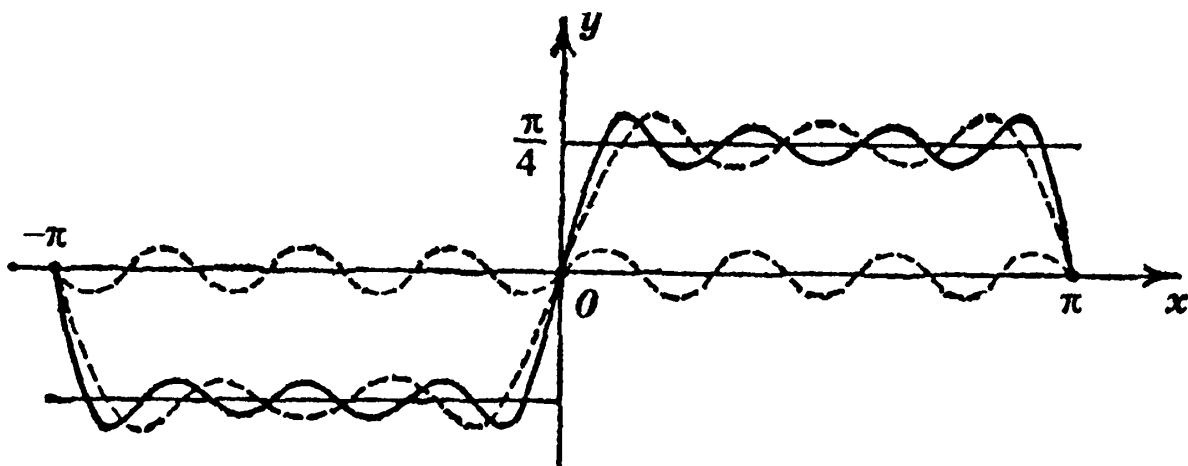


Рис. 112

$$\psi(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \quad x = \pi, \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

На рис. 109 (наряду с графиком  $\psi(x)$ ) изображена функция  $S_1(x) = \sin x$ . На рис. 110 штриховыми линиями нарисованы графики  $S_1(x)$  и  $\frac{\sin 3x}{3}$  и сплошной линией —

$$S_2(x) = S_1(x) + \frac{\sin 3x}{3}.$$

На рис. 111 штриховыми линиями нарисованы графики  $S_2(x)$  и  $\frac{\sin 5x}{5}$  и сплошной линией —

$$S_3(x) = S_2(x) + \frac{\sin 5x}{5}$$

и т. д. Уже из рис. 112 видно, что надо полагать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\pi < x \leq \pi). \quad (5)$$

Так оно и есть на самом деле. По этому поводу см. далее § 4.4. Функции  $S_n(x)$  для любого  $n$  имеют период  $2\pi$ :

$$S_n(x + 2\pi) = S_n(x).$$

Продолжим функцию  $\psi(x)$  на всю действительную ось периодически с периодом  $2\pi$ . Тогда она будет иметь график, как на рис. 113. Так как равенство (5) выполняется для всех  $x \in (-\pi, \pi]$  и функции  $S_n(x)$  и  $\psi(x)$  периода  $2\pi$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

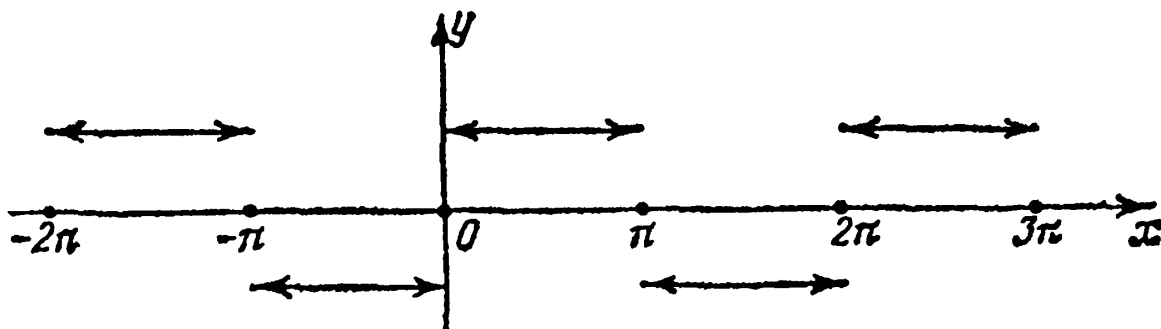


Рис. 113



Пример 2. На рис. 114 изображены три периодических периода  $2\pi$  функции

$$S_2(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} \quad (\text{сплошной линией}),$$

$$S_3(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \quad (\text{штрихами}),$$

$$S_4(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \quad (\text{точками}).$$

Для больших  $n$  график суммы  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin kx}{k}$

схематически (не точно) изображается на рис. 115, что наводит на мысль, что предельная функция

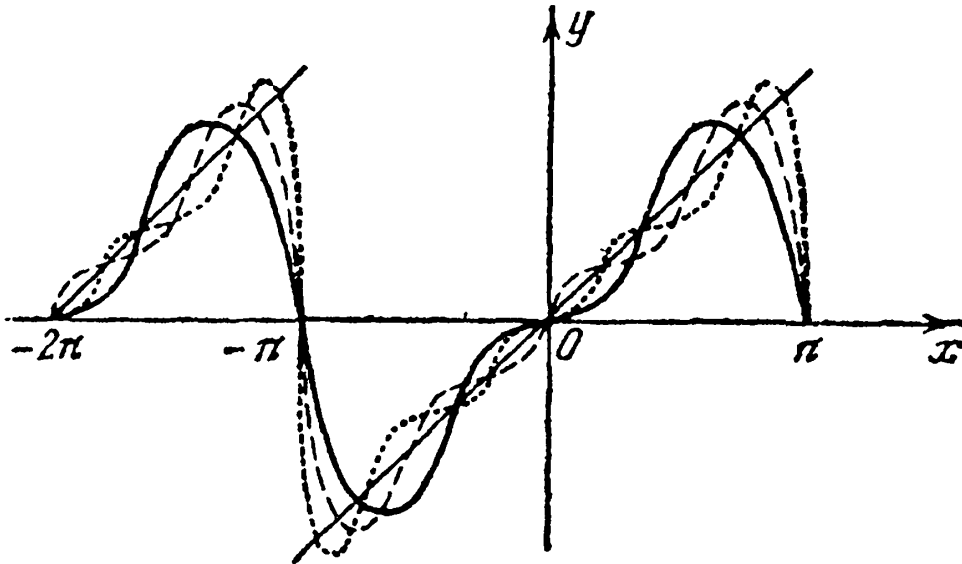


Рис. 114

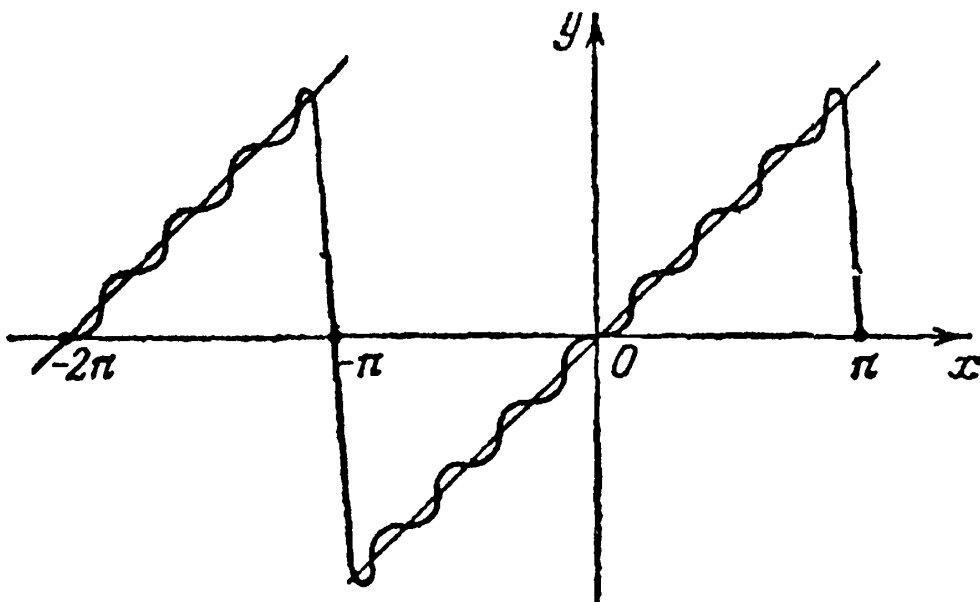


Рис. 115

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

есть периодическая (периода  $2\pi$ ) функция, определяемая равенствами

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$

Это так и есть (см. § 4.4).

## § 4.2. Сходимость тригонометрических рядов

Пусть задан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right). \quad (1)$$

Чтобы выяснить, сходится ли он, естественно рассмотреть числовой ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \quad (2)$$

*мажорирующий*, как говорят, ряд (1). Его члены превышают соответственно абсолютные величины членов ряда (1):

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right| \leq |a_k|, \quad \left| b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right| \leq |b_k|.$$

Отсюда следует, что если ряд (2) сходится, то сходится также ряд (1) для всех  $x$  и притом абсолютно и равномерно (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.8, теорема 1). Но ряд (1) может сходиться без того, чтобы сходился ряд (2). Ведь его члены для каждого  $x$  при изменении  $k$  меняют знак (осциллируют) бесконечное число раз, и он может оказаться сходящимся вследствие компенсации положительных членов отрицательными. В общей теории рядов существуют признаки сходимости подобных рядов. Такими признаками являются признаки Дирихле и Абеля<sup>1</sup> (см. § 9.9, теоремы 3, 4 той же книги), хорошо приспособленные к исследованию тригонометрических рядов.

<sup>1</sup> Н. Х. Абель (1802–1829) – норвежский математик. П. Г. Лежен Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.

Так или иначе, если установлено, что ряд (1) равномерно сходится, то из того, что его члены суть непрерывные функции периода  $2l$ , следует, что и его сумма

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (3)$$

есть непрерывная функция периода  $2l$  (см. § 9.8, теорема 2 и § 9.9, теорема 2 той же книги) и ряд (3) можно почленно интегрировать.

Ряд (3) можно формально продифференцировать по  $x$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi}{l} x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (4)$$

и составить его мажорирующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} (|a_k| + |b_k|). \quad (5)$$

Снова, если ряд (5) сходится, то ряд (4) сходится и притом равномерно. Больше того, на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов тогда сумма ряда (4) есть производная от суммы ряда (3), т. е.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi}{l} x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right).$$

Вообще, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^s (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

при некотором натуральном  $s$  сходится, то ряд (3) законно дифференцировать почленно  $s$  раз.

Впрочем, надо помнить, что не исключено, что ряд (3) законно продифференцировать и еще один раз (т. е.  $s + 1$  раз).

**Пример.** Выяснить, сколько раз можно продифференцировать почленно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx \quad (0 < q < 1).$$

Продифференцируем данный ряд формально  $s$  раз:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k \left\{ \begin{array}{l} \cos kx \\ \sin kx \end{array} \right\}.$$

Мажорирующий ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k$  ( $0 < q < 1$ ) сходится при

любом натуральном  $s$ , что можно установить с помощью признака Даламбера. Поэтому исходный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

**Задача.** Сколько раз заведомо можно продифференцировать почленно ряды

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3},$$

$$\text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} q^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (0 < q < 1, |a_k|, |b_k| < M).$$

Сколько непрерывных производных заведомо имеют суммы этих рядов (см. также пример 1 § 9.9 той же книги).

### § 4.3. Ряд Фурье

Пусть задана функция  $f(t)$  периода  $2l$  и известно, что ее можно разложить в тригонометрический ряд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right), \quad (1)$$

т. е. она уже есть сумма некоторого тригонометрического ряда (вида (1)) для всех  $t$  (или, быть может, для всех  $t$ , за исключением отдельных значений  $t$ ). Спрашивается, как определить по функции  $f(t)$  коэффициенты  $a_k, b_k$ . Этот вопрос принципиально был решен математиками и физиками в начале прошлого столетия. Существенный вклад в его решение внес Ж. Фурье<sup>1</sup>. Он показал, что коэффициенты  $a_k, b_k$  тригонометрического ряда, представляющего периодическую периода  $2l$  функцию  $f(t)$ , вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi}{l} t f(t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi}{l} t f(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Ж. Б. Фурье (1768–1830) – французский математик.

Числа  $a_k$  и  $b_k$ , вычисляемые по этим формулам, называют *коэффициентами Фурье* функции  $f(t)$ , а тригонометрический ряд (1), в который вместо  $a_k$  и  $b_k$  подставлены соответствующие коэффициенты Фурье, называют *рядом Фурье* функции  $f(t)$ .

В некоторых случаях (для более узких классов функций) формулы (2) были известны еще Эйлеру. Поэтому их называют еще формулами Эйлера–Фурье.

В § 4.6 будет дан вывод формул (2) в предположении, что уже известно, что периодическая периода  $2l$  функция  $f(t)$  разлагается в тригонометрический ряд, равномерно сходящийся к ней.

Нужно сказать, что физики давно считали, что всякое сложное периодическое движение точки (сложное колебание) – будь то механическое колебание точки звучащей струны или электромагнитное колебание, или колебание, связанное с распространением звука – распадается на гармонические колебания, т. е. сложное периодическое движение надо мыслить как сумму (конечную или бесконечную) простых гармонических колебаний того же периода. Выделение из сложного периодического движения, составляющего его гармонического колебания, соответствующего данной частоте  $k$ , имеет большое практическое значение. Физики такое выделение из реального движения получают при помощи специальных приборов – резонаторов. Математик, если ему данное движение задано при помощи периодической функции  $s = f(t)$ , получает такое выделение при помощи вычислений. Он просто вычисляет коэффициенты Фурье  $a_k, b_k$  этой функции, и тогда соответствующая  $k$ -я гармоника будет иметь вид

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t.$$

Отметим, что если функция  $f(t)$  имеет период  $a$  и интегрируема на отрезке  $[0, a]$  или, как говорят, на периоде, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^a f(x) dx = \int_\lambda^{a+\lambda} f(x) dx \quad (3)$$

для любого действительного числа  $\lambda$  (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 6.4, пример 8).

Свойство (3), в частности, показывает, что коэффициенты Фурье периодической функции  $f(t)$  периода  $2l$  можно записать в виде

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $\lambda$  — произвольное действительное число, потому что функции  $\cos \frac{k\pi}{l} t$  и  $\sin \frac{k\pi}{l} t$  периода  $2l$ , а произведение функций периода  $2l$  — в свою очередь функции периода  $2l$ .

Отметим еще, что если функция  $f$  четная на отрезке  $[-a, a]$ , то (см. § 6.4, пример 6 той же книги)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Если же функция  $f$  нечетная на отрезке  $[-a, a]$ , то (см. пример 7 § 6.4 той же книги)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Функция  $\cos \frac{k\pi}{l} t$  четная, а  $\sin \frac{k\pi}{l} t$  нечетная. Кроме того, произведение двух четных и двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция. Поэтому для четной периода  $2l$  функции  $f(t)$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а для нечетной —

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию (периода  $2\pi$ )  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ).

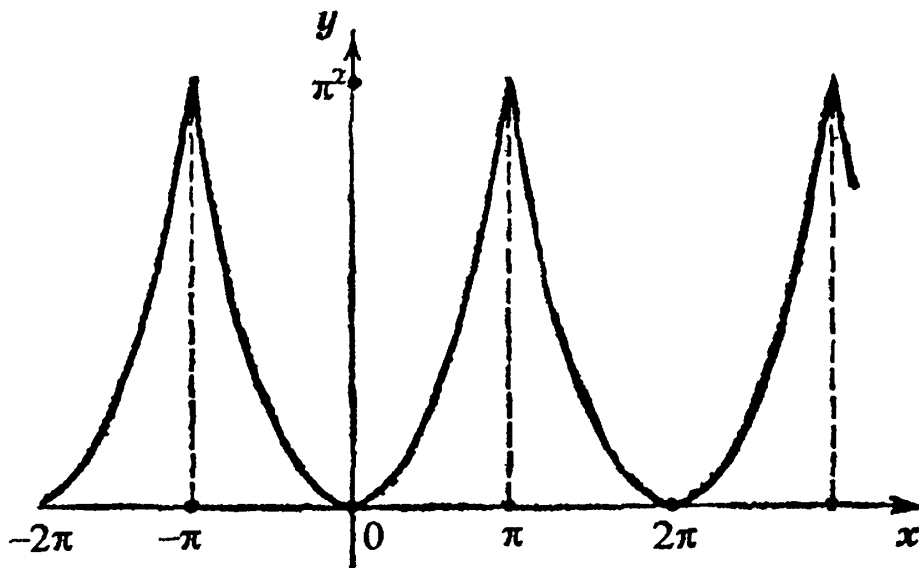


Рис. 116

Данная функция четная. Тогда ее ряд Фурье состоит только из косинусов ( $b_k = 0$ ). Вычислим коэффициенты  $a_k$ :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

и

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \\ &= \frac{4x \cos kx}{\pi k} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kx dx = (-1)^k \frac{4}{k^2} \quad (k > 0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

График суммы этого ряда изображен на рис. 116.

#### § 4.4. Признаки сходимости рядов Фурье

Чтобы упростить записи, будем рассматривать функции периода  $2\pi$ . Для функций периода  $2l$ , где  $l$  — произвольное положительное число, рассуждения аналогичны.

Как мы знаем, рядом Фурье функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Мы видим, что для того, чтобы ряд Фурье функции  $f$  периода  $2\pi$  имел смысл, во всяком случае должны иметь смысл интегралы (2).

В наших рассуждениях интегралы (2) всегда будут иметь смысл, потому что мы будем говорить о непрерывных или кусочно-непрерывных на периоде ограниченных функциях.

Поставим вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция  $f(x)$ , чтобы ее ряд Фурье сходился к ней. Этим вопросом математики занимались много. Мы ограничимся тем, что сформулируем несколько важных с практической точки зрения достаточных признаков сходимости рядов Фурье, не доказывая их.

*Если функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  непрерывна на всей действительной оси и имеет кусочно-непрерывную производную на периоде, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**Пример 1.** Функция  $\psi(x)$  периода  $2\pi$ , четная и определяемая на отрезке  $[0, \pi]$  равенством

$$\psi(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

удовлетворяет, очевидно, сформулированному признаку (см. график этой функции на рис. 117). Ее коэффициенты Фурье  $b_k = 0$ , а коэффициенты ( $k \geq 1$ )

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$



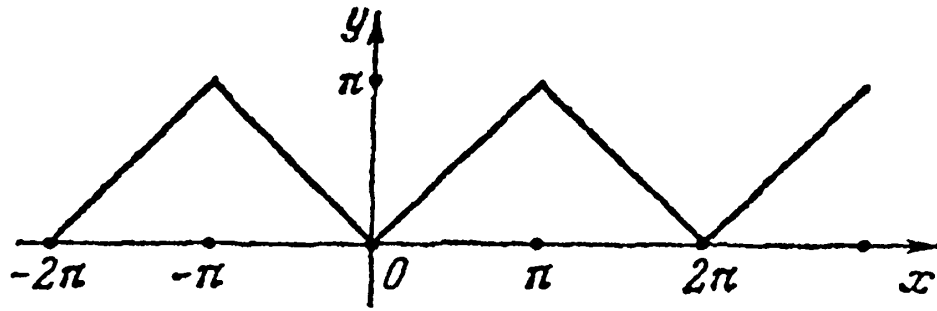


Рис. 117

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1); \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \pi; \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Но тогда, согласно указанному признаку,

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (-\infty < x < \infty);$$

при этом сходимость ряда равномерная.

Тот факт, что этот ряд сходится равномерно, следует и из общей теории рядов (по критерию Вейерштрасса). Но не тривиально, что он сходится именно к функции  $\psi(x)$ .

Отметим еще, что данная периодическая функция  $\psi(x)$  совпадает с функцией  $y = x$  только на отрезке  $[0, \pi]$ , а вне отрезка  $[0, \pi]$  эти две функции различны.

Сформулируем еще признак сходимости ряда Фурье, называемый *признаком Дирихле*.

Говорят, что функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  удовлетворяет условию Дирихле, если на отрезке  $[0, 2\pi]$  можно указать конечное число точек  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 2\pi$  таких, что на интервалах  $(x_j, x_{j+1})$  функция ограничена, непрерывна и монотонна (не убывает или не возрастает), а в точках  $x_j$  разрыва  $f$

$$f(x_j) = \frac{1}{2} (f(x_j + 0) + f(x_j - 0)),$$

т. е. значение  $f$  в  $x_j$  есть среднее арифметическое правого и левого пределов  $f$  в  $x$ .

Если функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  удовлетворяет условию Дирихле, то ее ряд Фурье сходится к ней для любого  $x$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 2. Функция  $\varphi(x)$  периода  $2\pi$ , определяемая равенством

$$\psi(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

как это видно из ее графика (рис. 118), удовлетворяет условию Дирихле. Ведь точки  $0 = x_0 < x_1 = 2\pi$  обладают свойством: функция  $\varphi(x)$  убывает, непрерывна и ограничена на интервале  $(x_0, x_1)$  и

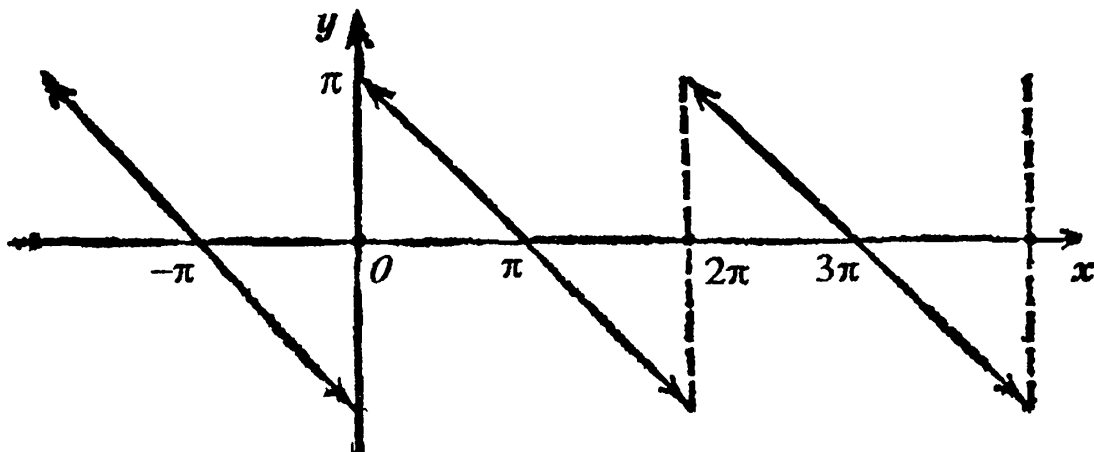


Рис. 118

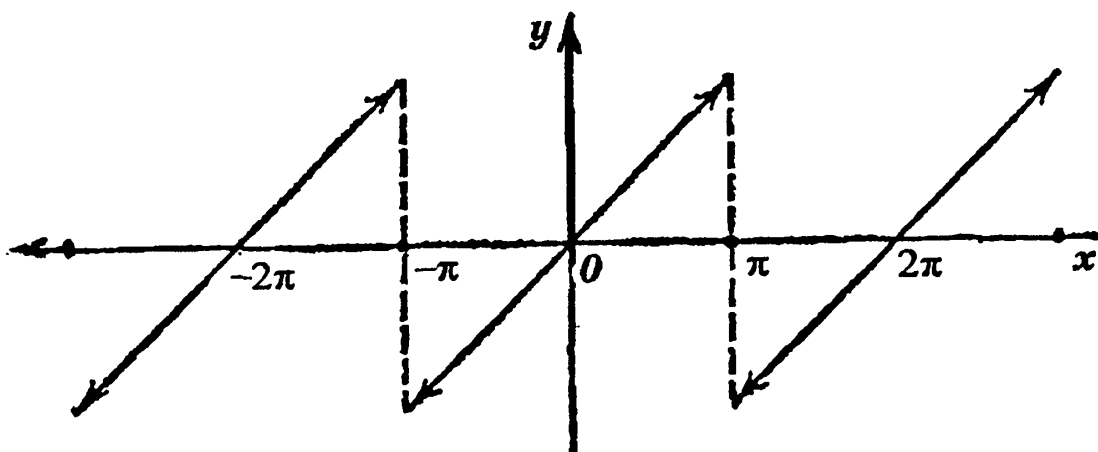


Рис. 119

$$\varphi(0) = \frac{\varphi(0+0) + \varphi(0-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

$$\varphi(2\pi) = \frac{\varphi(2\pi+0) + \varphi(2\pi-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

Функция  $\varphi(x)$  нечетная, поэтому ее ряд Фурье состоит только из синусов; следовательно, коэффициенты Фурье для нее

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx dx = -\frac{2}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx = \frac{2}{k} - \frac{2}{\pi k} \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Итак,

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty).$$

**Задача.** Разложить в ряд Фурье функцию периода  $2\pi$ , определенную на  $[-\pi, \pi]$  равенством (рис. 119)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}.$$

#### § 4.5. Ортогональные свойства тригонометрических функций

Рассмотрим последовательность тригонометрических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (1)$$

Для них справедливы важные (легко проверяемые) формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} & (k, l = 0, 1, 2, \dots), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} & (k, l = 1, 2, \dots), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin lxdx &= 0 & (k, l = 1, 2, 3, \dots), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx &= 0 & (k = 1, 2, \dots), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx &= 0 & (k = 1, 2, \dots), \\
 \int_{-\pi}^{\pi} 1dx &= 2\pi.
 \end{aligned} \right\} (2)$$

Из (2), в частности, следует, что интеграл по отрезку  $[-\pi, \pi]$  от произведения любых двух различных функций последовательности (1) равен нулю.

Это свойство формулируют так: *функции последовательности (1) ортогональны на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .*

Из формул (2) следует:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx &= \pi, \\
 & k = 1, 2, \dots, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kxdx &= \pi, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx &= 2\pi.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

**Задача.** Получить формулы, аналогичные формулам (2), (3), для тригонометрических функций

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots$$

У к а з а н и е. Можно их получить непосредственно вычислением. Но можно также их получить, произведя в интегралах (2), (3) замену переменной  $x = \frac{\pi u}{l}$ .

### § 4.6. Коэффициенты Фурье

Допустим, что функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  разложена в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

и оказалось, что этот ряд равномерно сходится к ней.

Каждый член ряда (1) есть непрерывная функция, и так как ряд (1) по условию равномерно сходится, то его сумма  $f(x)$  есть непрерывная (на действительной оси) функция (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.8, теорема 2).

Помножим левую и правую части (1) на  $\cos mx$ , где  $m$  — натуральное число. Так как функция  $\cos mx$  непрерывна и ограничена, то полученный ряд снова будет состоять из непрерывных функций и снова будет равномерно сходиться, теперь уже к непрерывной функции  $f(x)\cos mx$ . Но равномерно сходящиеся ряды непрерывных функций законно интегрировать почленно на конечном отрезке. Проинтегрируем полученный ряд почленно на периоде, т. е. на отрезке  $[-\pi, \pi]$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx \right) = \\ &= a_m \pi \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из ортогональности тригонометрических функций и формул (3) § 4.5.

Аналогично получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) 1 dx &= \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi \end{aligned}$$

в силу последних трех формул (2) § 4.5.

Как уже отмечалось в § 4.4, (2), числа  $a_m, b_m$ , вычисляемые по формулам (2) § 4.4, называются *коэффициентами Фурье функции  $f$* , а сам тригонометрический ряд (1), где  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты Фурье функции  $f$ , называется *рядом Фурье функции  $f$* .

Итак, мы доказали, что *если функция  $f$  представима в виде суммы тригонометрического ряда (1), равномерно сходящегося (для всех  $x$ !), то числа  $a_k, b_k$  необходимо являются коэффициентами Фурье функции  $f$* .

**Замечание 1.** Таким образом, *всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы*.

**Замечание 2.** Мы рассмотрели здесь функцию  $f(x)$  периода  $2\pi$ , чтобы не усложнять записи. Для периода  $2l$  рассуждения аналогичны.

## § 4.7. Оценка коэффициентов Фурье

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  имеет непрерывную производную  $f^{(s)}(x)$  порядка  $s$ , удовлетворяющую на всей действительной оси неравенству

$$|f^{(s)}(x)| \leq M_s; \quad (1)$$

тогда коэффициенты Фурье функции  $f$  удовлетворяют неравенству

$$|a_k| \leq \frac{2M_s}{k^s}, \quad |b_k| \leq \frac{2M_s}{k^s} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Доказательство. Интегрируя по частям и учитывая, что  $f(-\pi) = f(\pi)$ , имеем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(t) \frac{\sin kt}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\sin kt}{k} dt \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Поэтому

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} M_1 \cdot 1 dx = \frac{2M_1}{k}.$$

Интегрируя по частям правую часть (3) последовательно, учитывая, что производные  $f', \dots, f^{(s-1)}$  непрерывны и принимают одинаковые значения в точках  $t = -\pi$  и  $t = \pi$ , а также оценку (1), получим первую оценку в (2).

Вторая оценка в (2) получается подобным образом.

#### § 4.8. Пространство функций со скалярным произведением

Функция  $f(x)$  называется *кусочно-непрерывной на отрезке*  $[a, b]$ , если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода (см. также § 7.4 нашей книги «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление»). Такие функции можно складывать и умножать на действительные числа и получать как результат снова кусочно-непрерывные на  $[a, b]$  функции.

Скалярным произведением двух кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  ( $a < b$ ) функций  $f$  и  $\varphi$  будем называть интеграл

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Очевидно, для любых кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  функций  $f, \varphi, \psi$  выполняются свойства:

$$1) (f, \varphi) = (\varphi, f).$$

2)  $(f, f) \geq 0$  и из равенства  $(f, f) = 0$  следует, что  $f(x) = 0$  на  $[a, b]$ , исключая, быть может, конечное число точек  $x$ .

$$3) (\alpha f + \beta \varphi, \psi) = \alpha(f, \psi) + \beta(\varphi, \psi),$$

где  $\alpha, \beta$  — произвольные действительные числа.

Множество всех кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ , для которых введено скалярное произведение по формуле (1), мы будем обозначать  $L'_2 = L'_2(a, b)$  и называть *пространством  $L'_2$*  или  $L'_2(a, b)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** В математике называют пространством  $L_2 = L_2(a, b)$  совокупность функций  $f(x)$ , интегрируемых в лебеговом смысле на  $[a, b]$  вместе со своими квадратами, для которых введено скалярное произведение по формуле (1). Рассматриваемое пространство  $L'_2$  есть часть  $L_2$ . Пространство  $L'_2$  обладает многими свойствами пространства  $L_2$ , но не всеми (см. далее примечание в § 4.9).

Из свойств 1), 2), 3) следует важное *неравенство Буняковского*<sup>1</sup> (см. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 6, (6))

$$|(f, \varphi)| \leq (f, f)^{1/2}(\varphi, \varphi)^{1/2},$$

которое на языке интегралов выглядит так:

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}.$$

Величина

$$\|f\| = \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2}$$

называется *нормой* функции  $f$ .

Норма обладает следующими свойствами:

$$1) \|f\| \geq 0,$$

при этом равенство может быть только для нулевой функции  $f = 0$ , т. е. функции, равной нулю, за исключением, быть может, конечного числа точек (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 6.2, теорема 5),

$$2) \|f + \varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi\|,$$

<sup>1</sup> В. Я. Буняковский (1804–1889) — русский математик.



$$3) \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|,$$

где  $\alpha$  — действительное число.

Второе свойство на языке интегралов выглядит так:

$$\left( \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left( \int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}$$

и называется *неравенством Минковского*.

Говорят, что *последовательность функций*  $\{f_n\}$ , принадлежащих к  $L'_2$ , *сходится к функции*  $f \in L'_2$  *в смысле среднего квадратического на*  $[a, b]$  *(или еще по норме*  $L'_2$ *), если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

Отметим, что если последовательность функций  $f_n(x)$  сходится равномерно к функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то для достаточно больших  $n$  разность  $f(x) - f_n(x)$  по абсолютной величине должна быть мала для всех  $x \in [a, b]$ .

В случае же, если  $f_n(x)$  стремится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического на отрезке  $[a, b]$ , то указанная разность может и не быть малой для больших  $n$  всюду на  $[a, b]$ . В отдельных местах отрезка  $[a, b]$  эта разность может быть и велика, но важно только, чтобы интеграл от ее квадрата по отрезку  $[a, b]$  был мал для больших  $n$ .

Пример. Пусть на  $[0, 1]$  задана изображенная на рис. 120 непрерывная кусочно-линейная функция  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причем

$$f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0,$$

$$f_n(1/n) = 1.$$

При любом натуральном  $n$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = 1,$$

и, следовательно, эта последовательность функций не является равномерно сходящейся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Между тем

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| =$$

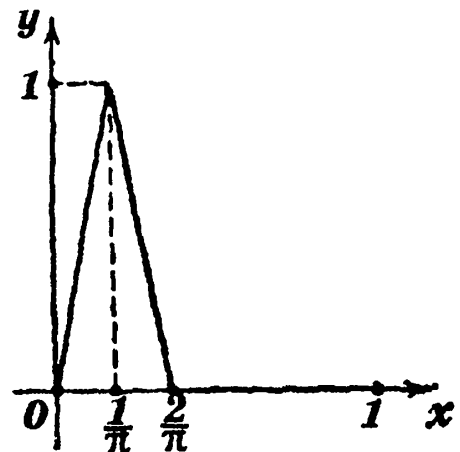


Рис. 120

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_0^1 f_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \int_0^{1/n} (nx)^2 dx + \int_{1/n}^{2/n} (2-nx)^2 dx \right)^{1/2} = \\
&= \left( 2 \int_0^{1/n} (nx)^2 dx \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{3n} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

т. е. последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  стремится к нулю в смысле среднего квадратического на  $[0, 1]$ .

Из элементов некоторой последовательности функций  $f_1, f_2, f_3, \dots$  (принадлежащих  $L'_2$ ) построим ряд

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots \quad (2)$$

Сумма первых его  $n$  членов

$$\sigma_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

есть функция, принадлежащая к  $L'_2$ . Если случится, что в  $L'_2$  существует функция  $f$  такая, что

$$\|f - \sigma_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

то говорят, что ряд (2) сходится к функции  $f$  в смысле среднего квадратического и пишут

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

**Замечание 2.** Можно рассматривать пространство  $L'_2 = L'_2(a, b)$  комплекснозначных функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — действительные кусочно-непрерывные на  $[a, b]$  функции. В этом пространстве функции умножаются на комплексные числа и скалярное произведение функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  и  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$  определяется следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)][\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] dx,$$

а норма  $f$  определяется как величина

$$\begin{aligned}
\|f\| &= (f, f)^{1/2} = \left( \int_a^b f \cdot \bar{f} dx \right)^{1/2} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \\
&= \left( \int_a^b [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

### § 4.9. Ортогональная система функций

Функция  $\varphi \in L'_2(a, b)$  называется *нормальной*, если

$$\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1.$$

Две функции  $\varphi, \psi \in L'_2$  называются *ортогональными* (между собой), если  $(\varphi, \psi) = 0$ . Система кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \quad (1)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если функции имеют положительную норму и попарно ортогональны.

Система (1) называется *ортогональной и нормальной* (*ортонормальной*) или *ортонормированной*, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

т. е. она ортогональна и каждая входящая в нее функция имеет единичную норму.

Любая конечная ортогональная система функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  *линейно независима* в  $L'_2$ , т. е. из того, что

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) = 0 \quad (x \in [a, b]),$$

где  $\alpha_k$  — числа, следует, что все  $\alpha_k = 0$ . В самом деле, если помножить обе части этого равенства скалярно на  $\varphi_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), то на основании линейных свойств скалярного произведения получим

$$\left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k, \varphi_l \right) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0,$$

и так как  $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$ , то  $\alpha_l = 0$  ( $l = 1, \dots, N$ ).

Если  $f \in L'_2(a, b)$  — произвольная функция, то число

$$\frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

называется коэффициентом Фурье функции  $f$  относительно функции  $\varphi_k$  ортогональной системы (1). Ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (2)$$

порождаемый функцией  $f \in L'_2$ , называется *рядом Фурье функции  $f$  по ортогональной системе (1)*.

Если система (1) ортонормальна, то  $\|\varphi_k\| = 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и ряд Фурье функции  $f$  записывается еще проще:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k. \quad (3)$$

Коэффициентами Фурье в этом случае являются числа  $(f, \varphi_k)$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только ортонормированные системы (1). Переход от них к произвольным ортогональным системам носит технический характер.

**Теорема 1.** *Если система (1) ортонормирована, то для любой функции  $f \in L'_2$  норма*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|$$

*среди всевозможных систем чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  достигает своего минимума для единственной системы чисел, определяемых равенствами*

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, \dots, N),$$

*т. е. для коэффициентов Фурье функции  $f$ .*

*Таким образом,*

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \quad (4)$$

*при этом*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2. \quad (5)$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|^2 &= \left( f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^N \alpha_j \varphi_j \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^N [(f, \varphi_k)^2 - 2\alpha_k(f, \varphi_k) + \alpha_k^2] + (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^N [(f, \varphi_k) - \alpha_k]^2 + (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 \geq \\
&\qquad\qquad\qquad \geq (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2.
\end{aligned}$$

При этом очевидно, что последнее соотношение в этой цепи обращается в равенство только в единственном случае, когда  $\alpha_k = (f, \varphi_k)$  при любом  $k$ . Тем самым мы доказали соотношения (4) и (5).

Из равенства (5), если учесть, что его левая часть есть неотрицательное число, вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 \leq (f, f),$$

верное при любом  $N$ . Но тогда, если система (1) состоит из бесконечного числа функций  $\varphi_k$ , то ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье функции  $f$ , сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 \leq (f, f), \quad (6)$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Очень важен тот случай, когда ортонормированная система (1) такова, что неравенство (6) обращается в равенство (*равенство Парсеваля–Стеклова*<sup>1</sup>)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = (f, f) \quad (7)$$

для всех функций  $f \in L'_2$ .

Чтобы выяснить значение равенства Парсеваля, зададим произвольную функцию  $f \in L'_2$  и составим для нее ее ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

<sup>1</sup> М. А. Парсеваль (1755–1836) – французский математик. В. А. Стеклов (1864–1926) – русский советский математик и физик.

Сумма первых  $n$  членов этого ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

называется  $n$ -й суммой Фурье функции  $f$  по ортогональной системе (1).

Согласно формуле (5) отклонение  $S_n(x)$  от  $f(x)$  в смысле среднего квадратического (в смысле  $L'_2$ ) равно

$$\|f - S_n\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2. \quad (8)$$

Если для функции  $f \in L'_2$  выполняется равенство Парсеваля (7), то

$$\|f - S_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

и обратно, из (9) вытекает справедливость равенства Парсеваля (7).

Существует следующая терминология. *Ортогональная система (1) называется полной в  $L'_2$* , если ряд Фурье любой функции  $f \in L'_2$  сходится в смысле среднего квадратического к  $f$ , т. е. если имеет место свойство (9) для всех  $f \in L'_2$ .

Мы, таким образом, доказали, что *для того чтобы ортонормированная система (1) была полной в  $L'_2$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f \in L'_2$  выполнялось равенство Парсеваля (7).*

*Примечание.* Мы уже отмечали в замечании 1 § 4.8, что  $L_2 = L_2(a, b)$  обозначает пространство функций  $f(x)$ , интегрируемых в лебеговом смысле на  $[a, b]$  вместе со своими квадратами и что  $L'_2 \subset L_2$ .

Рассмотрим ортонормированную на отрезке  $[a, b]$  систему непрерывных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots,$$

полную в том, смысле, как это мы определили выше. Мы знаем, что если  $f \in L'_2$ , то для чисел

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

выполняется равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Это верно и для функций  $f \in L_2$ , только интегралы надо понимать в смысле Лебега.

Но имеет место и обратное утверждение: если числа  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) таковы, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

сходится, то в  $L_2$  существует функция  $f(x)$  такая, что числа  $c_k$  являются ее коэффициентами Фурье и выполняется соотношение (9).

А в  $L'_2$  такой функции может и не быть. В этом проявляется несовершенство пространства  $L'_2$ . В пространстве  $L'_2$  недостаточно количество функций, для того чтобы это обратное утверждение имело место.

### § 4.10. Полнота тригонометрических функций

В § 4.4 были приведены признаки сходимости ряда Фурье. Речь там шла об обычной сходимости. Сейчас мы сформулируем признак сходимости ряда Фурье в смысле среднего квадратического.

Совокупность всех функций  $f$  периода  $2\pi$ , ограниченных на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и непрерывных на нем, за исключением, быть может, конечного числа точек, где  $f$  имеет разрыв первого рода, обозначим через  $L'_2* = L'_2*(-\pi, \pi)$ .

*Если функция  $f \in L'_2*$ , то ее ряд Фурье*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{Bmatrix} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

*сходится к ней в смысле среднего квадратического, т. е.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2)$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Формулу (1), где стоит знак равенства, надо читать в данном случае так: функция  $f(x)$  есть сумма ее ряда Фурье, сходящегося к ней (на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ) в смысле среднего квадратического.

Подсчитаем непосредственно интеграл в (2), учитывая ортогональные свойства тригонометрических функций,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\
& - 2 \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) + \frac{a_0^2}{2} \pi + \\
& + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).
\end{aligned}$$

Для функции  $f \in L'_2*$  это выражение при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Но тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (f \in L'_2*), \quad (3)$$

называемое *равенством Парсевала* для тригонометрических функций (*равенством Ляпунова*).

**З а м е ч а н и е.** При сравнении формулы (3) с формулой (7) § 4.9 надо учесть, что последняя была выведена для ортонормированной системы, а рассматриваемая здесь формула (3) получена для ортогональной, но не нормированной системы, какой является система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

**Функции**

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \quad (4)$$

образуют ортогональную систему на отрезке  $[0, \pi]$ . Имеет место

**Т е о р е м а 1.** Любую функцию  $f \in L'_2(0, \pi)$ , т. е. кусочно-непрерывную на  $[0, \pi]$ , можно разложить в ряд Фурье по косинусам:



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad (5)$$

( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

и при этом ряд (5) сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

В самом деле, эту функцию можно продолжить на  $[-\pi, \pi]$  четным образом, а затем периодически с периодом  $2\pi$  на всю действительную ось. Получится функция  $f \in L'_2$ . Ряд Фурье функции  $f$  по функциям  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  в силу четности  $f$  имеет в точности вид (5) и, как мы уже знаем, этот ряд сходится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического на  $[-\pi, \pi]$ . Тем более, в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

Сказанное можно выразить следующими словами: система функций (4) ортогональная и является полной системой в  $L'_2(0, \pi)$ .

Верно также утверждение:

система функций

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (6)$$

ортогональная и является полной системой в  $L'_2(0, \pi)$ , т. е. имеет место

**Теорема 2.** Любую функцию  $f \in L'_2(0, \pi)$  можно разложить в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad (7)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ),

сходящийся к ней в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

Ортогональность системы (6) проверяется непосредственно и следует из (2) § 4.5. Что же касается полноты, то она вытекает из следующих соображений.

Продолжим функцию  $f \in L'_2(0, \pi)$  на отрезок  $[-\pi, \pi]$  нечетным образом и затем периодически с периодом  $2\pi$ . Ее ряд Фурье по системе  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  сходится в смысле среднего квадратического на  $[-\pi, \pi]$ . Тем более на  $[0, \pi]$ . Притом этот ряд имеет вид (7).

**Пример.** Разложить в ряд по синусам функцию  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

Продолжим эту функцию нечетным образом на  $[-\pi, 0]$  и затем периодически с периодом  $2\pi$  на всю действитель-

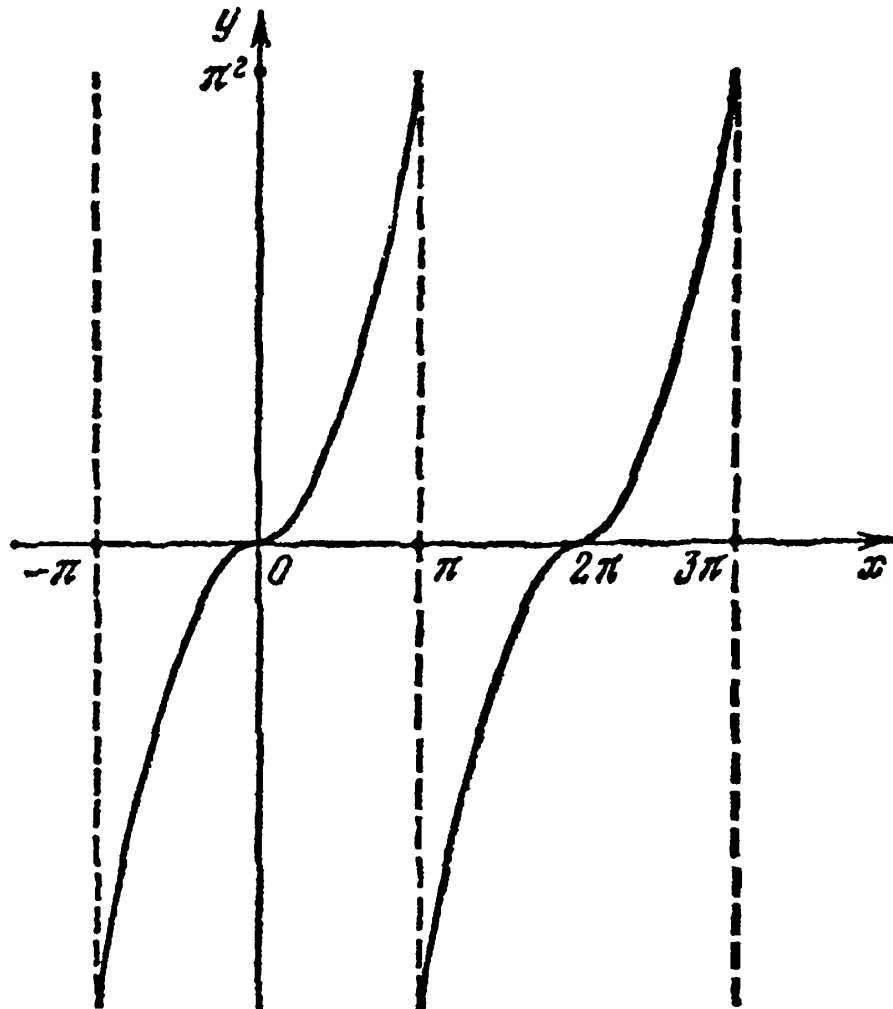


Рис. 121

ную ось. Тогда ряд Фурье этой функции  $\psi(x)$  будет состоять только из синусов:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k^3} [(-1)^k - 1],$$

откуда

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

Таким образом,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

График суммы этого ряда изображен на рис. 121.

### § 4.11. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ . На основании формул Эйлера

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \\ &= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}, \end{aligned}$$

где (будем считать  $b_0 = 0$ )

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \quad (1)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt - i \sin kt) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \\ c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt + i \sin kt) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt. \end{aligned}$$

Эти два равенства можно записать в виде единой формулы

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Важно заметить, что если  $f(x)$  — действительная функция, то  $a_k$  и  $b_k$  действительны, а числа  $c_k$  и  $c_{-k}$ , хотя вообще и комплексны, но взаимно сопряжены:

$$c_{-k} = \bar{c}_k. \quad (3)$$

Очевидно,  $n$ -я сумма ряда Фурье функции  $f$  может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (4)$$

а сам ряд Фурье функции  $f$  — в виде ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (5)$$

Мы будем говорить, что ряд (5) сходится для данного значения  $x$ , если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Таким образом определенная сходимость называется *сходимостью в смысле главного значения*.

Ведь можно было бы считать его сходящимся, если существует предел

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{-m}^m c_k e^{ikx},$$

тогда  $m$  и  $n$  неограниченно возрастают независимо друг от друга.

Комплексные функции

$$\{e^{ikx}\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

образуют ортогональную систему на отрезке  $[0, 2\pi]$ , так как при  $k \neq l$

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \left. \frac{e^{i(k-l)x}}{k-l} \right|_0^{2\pi} = 0$$

(первое равенство записано по определению скалярного произведения для комплекснозначных функций, см. замечание 2 § 4.8). Далее

$$(e^{ikx}, e^{ikx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} dx = 2\pi.$$

## § 4.12. Понятие интеграла Фурье.

### Повторный интеграл Фурье

Рассмотрим сначала кусочно-гладкую периода  $2\pi$  функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую свойству

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (1)$$

Это значит, что  $f$  имеет период  $2\pi$ , непрерывна и имеет непрерывную производную всюду на действительной оси, за исключением точек, которых на периоде  $[-\pi, \pi]$  конечное число; при этом в этих точках существуют пределы  $f$  и  $f'$  справа и слева. Кроме того, мы предполагаем, что в любой точке выполняется равенство (1). Это условие ко-

нечно существенно только для точек разрыва  $f$ , потому что в точках непрерывности оно выполняется автоматически. Совокупность всех указанных периодических функций  $f$  обозначим через  $L'^*$ .

Для каждой функции  $f \in L'^*$  можно рассматривать ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (2)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5)$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; b_0 = 0).$$

Выпишем еще  $N$ -ю сумму ряда Фурье функции  $f$ :

$$S_n^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}. \quad (6)$$

В теории рядов Фурье доказывается, что для любой функции  $f \in L'^*$  имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n^*(x) = f(x), \quad (7)$$

т. е. ряд Фурье функции  $f \in L'^*$  сходится к ней в любой точке  $x$ .

Интегралы Фурье могут быть введены по аналогии с рядами Фурье.

Теперь мы будем рассматривать непериодические функции  $f$  кусочно-гладкие и абсолютно интегрируемые на действительной оси. Для них, таким образом, интеграл (несобственный)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

конечен.

Термин кусочно-гладкая функция понимается в следующем смысле. Функция  $f$  непрерывна и имеет непрерывную производную для всех точек  $x$  действительной оси за исключением конечного числа точек, где функция  $f$  или ее производная  $f'$  разрывна. Однако в точках разрыва существуют правый и левый пределы как  $f$ , так и  $f'$ , при этом имеет место равенство

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Совокупность указанных непериодических функций обозначим через  $L' = L'(-\infty, \infty)$ .

По аналогии с коэффициентами Фурье мы вводим для функций  $f \in L'$  функции

$$a(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt \quad (0 \leq s < \infty), \quad (3')$$

$$b(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt \quad (0 < s < \infty), \quad (4')$$

$$c(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \quad (-\infty < s < \infty). \quad (5')$$

В то время как коэффициенты Фурье определяются для дискретных значений  $k=0, 1, 2, \dots$ , их аналоги (3') – (5') являются уже функциями непрерывного аргумента  $s$ .

По нашему предположению функция  $f$  кусочно-непрерывна, тем не менее функции  $a(s)$ ,  $b(s)$  и  $c(s)$  непрерывны.

Например, пусть для простоты функция  $f$  имеет только одну точку разрыва  $x_0$ . Тогда интеграл (3') можно разбить на два интеграла

$$a(s) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(t) \cos st dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_0} f(t) \cos st dt. \quad (8)$$

Если видоизменить функцию  $f(t)$  в точке  $t = x_0$ , считая, что  $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ , то под первым интегралом в (8) будет нахо-

даться непрерывная функция от  $s$  и  $t$  ( $-\infty < s < \infty$ ,  $x_0 \leq t < \infty$ ). По признаку Вейерштрасса (см. теорему 3 § 2.15) первый интеграл равномерно сходится, потому что

$$|f(t)\cos ts| \leq f(t), \quad \int_{x_0}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Но тогда первый интеграл есть непрерывная функция от  $s$  (см. теорему 1 § 2.15). Подобным образом доказывается непрерывность по  $s$  и второго интеграла (8).

Отметим еще, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} b(s) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = 0. \quad (11)$$

Например, чтобы доказать свойство (9), введем в интеграле

(3') замену переменной  $t = u + \frac{\pi}{s}$ . Тогда

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{s}\right) \cos(su + \pi) du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{s}\right) \cos u s du = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) \cos t s dt. \end{aligned}$$

Из этого равенства и из (3') следует:

$$\begin{aligned} |a(s)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) - f(t) \right] \cos t s dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) - f(t) \right| dt \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Последнее соотношение (стремление к нулю), конечно, надо доказывать, но мы это делать не будем.

Аналогом отдельного члена ряда Фурье (гармоники) естественно считать функцию

$$\begin{aligned}
& a(s)\cos xs + b(s)\sin xs = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos t s \cos xs + \sin t s \sin xs] dt = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t - x) s dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}] dt = \\
& = c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Точнее, аналогом члена ряда Фурье надо считать  $(a(s)\cos xs + b(s)\sin xs)ds = (c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx})ds$ . (12')

Аналогом  $N$ -й суммы Фурье надо считать следующий интеграл (см. (12)):

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \int_0^N [a(s)\cos xs + b(s)\sin xs] ds = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^N \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t - s) s dt ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^N f(t) \cos(t - x) s ds = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^N \cos(t - s) s ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t - x)}{t - x} dt. \tag{13}
\end{aligned}$$

Мы переставили местами интегралы. В данном случае это законно. На основании известной в анализе теоремы Фубини<sup>1</sup> переставлять интегралы в кратном интеграле можно, если после перестановки получится абсолютно сходящийся кратный интеграл. В данном случае

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^N |f(t) \cos(t - x) s| dt ds \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^N |f(t)| ds dt = \\
& = \frac{N}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.
\end{aligned}$$

В силу (12) функцию  $S_N(x)$  можно также записать в комплексной форме

<sup>1</sup> Г. Фубини (1879–1943) – итальянский математик.



$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \int_0^N [c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx}]ds = \\
&= \int_{-N}^N c(s)e^{isx}ds = \int_{-N}^N e^{isx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{isx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt ds. \tag{13'}
\end{aligned}$$

Функцию

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin Nu}{u} du \tag{14}$$

называют *простым интегралом Фурье*.

Можно доказать, что если  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , то для  $x$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x), \tag{15}$$

т. е. имеет место свойство, аналогичное свойству (7) для рядов Фурье.

Отметим, что  $N$ -я сумма ряда Фурье периодической функции может быть записана следующим образом (пояснения ниже):

$$\begin{aligned}
S_N^*(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) dt + \\
&+ \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \sin kx \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(t-x) \right] dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(N + 1/2)(t - x)}{2 \sin((t - x)/2)} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + x) \frac{\sin(N + 1/2)u}{2 \sin(u/2)} du. \tag{16}
\end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.8, (15))

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k\alpha = \frac{\sin(N + 1/2)\alpha}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

В последнем же равенстве (16) мы сделали замену переменной  $t = u + x$ . В силу этой замены интеграл по отрезку  $[-\pi, \pi]$  по  $t$  перейдет в интеграл по  $[x - \pi, x + \pi]$  по  $u$ , но последний отрезок можно снова заменить на отрезок  $[-\pi, \pi]$ , потому что подынтегральная функция (от  $u$ ) периода  $2\pi$  (см. (3) § 4.3).

Мы видим, что интеграл в правой части (16) очень похож на интеграл (14). Поэтому не так уж удивительно, что оба эти интеграла стремятся при  $N \rightarrow \infty$  к функции  $f(x)$ .

Из (13) и (15) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^N ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t - x) s dt = f(x). \tag{17}$$

Следовательно, для любой функции  $f \in L'(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t - x) s dt = f(x). \tag{18}$$

Это очень важное равенство, которое составляет основу в теории интегралов Фурье.

Интеграл в (18) называется *повторным интегралом Фурье*.

Равенство (18) утверждает, что для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$  *повторный интеграл Фурье от  $f$  в точке  $x$  равен значению функции  $f$  в точке  $x$ .*

В интеграле (18) менять порядок интегрирования нельзя. Да ничего бы и не получилось хорошего. Если бы мы произвели такую замену — пришлось бы тогда интегрировать по  $s$  функцию  $\cos(t - x)s$  (при фиксированных  $t$

и  $x$ ) на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ , но такой интеграл не имеет смысла.

Таким образом, в повторном интеграле (18) мы должны сначала интегрировать функцию  $f(t)\cos(t-x)s$  по  $t$  на  $(-\infty, \infty)$ , а затем по  $s$  на  $(0, \infty)$ . Оба интеграла несобственные. Интеграл по  $t$ , очевидно, абсолютно сходится. Что же касается интеграла по  $s$ , то это, вообще говоря, не так.

Буквы  $s$  и  $t$  в интеграле (18) можно, конечно, заменить при желании любыми другими буквами  $s'$ ,  $t'$ , что не изменит величину интеграла.

Из (13) и (15) мы получили формулу (18). С другой стороны, из (13') и (15) мы получим другую важную формулу, верную для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist} dt = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = f(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \\ &= \sqrt{2\pi} c(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt = \\ &= \sqrt{2\pi} c(-x). \end{aligned}$$

$\tilde{f}(x)$  называется *преобразованием Фурье* или *прямым преобразованием Фурье функции  $f$* , а  $\hat{f}(x)$  называется *обратным преобразованием Фурье функции  $f$* . Операции  $\sim$  и  $\hat{\phantom{f}}$  взаимно обратны. Если к функции  $f$  применить операцию  $\sim$ , а к полученной функции  $\tilde{f}$  применить операцию  $\hat{\phantom{f}}$ , то, как видно из (19), получим снова функцию  $f$ :

$$\hat{\tilde{f}} = f, \text{ аналогично } \tilde{\hat{f}} = f \quad (20)$$

**Задача.** Доказать следующие формулы для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$ :

$$1) \hat{f}(-t) = \tilde{f}(t);$$

$$2) \tilde{f}(-x) = \hat{f}(x);$$

$$3) \widetilde{f(at)} = \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{x}{a}\right);$$

$$4) \widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0);$$

$$5) e^{i\mu t} \tilde{f} = \widetilde{e^{-i\mu t} \hat{f}} = f(x + \mu) \quad (\mu - \text{действительное});$$

$$6) \tilde{\tilde{f}} = f.$$

Например,

$$\begin{aligned} e^{i\mu t} \tilde{f} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu+x)t} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du = \hat{f}(\mu + x) = \\ &= f(\mu + x). \end{aligned}$$

### § 4.13. Косинус- и синус-преобразования Фурье

В силу (18) § 4.12 для  $f \in L'(-\infty, \infty)$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x)s dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ts dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ts dt. \quad (1) \end{aligned}$$

Если функция  $f(t)$  четная, то второй интеграл в правой части (1) равен нулю, а в первом интегрирование по  $t$  на  $(-\infty, \infty)$  сводится к интегрированию по  $(0, \infty)$ , и мы получим формулу

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs ds \int_0^{\infty} f(t) \cos ts dt = f(x). \quad (2)$$

Для нечетной же функции  $f(t)$  первый интеграл справа в (1) равен нулю, а функция  $f(t)\sin ts$  четная. Поэтому

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs ds \int_0^{\infty} f(t) \sin ts dt = f(x). \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) можно считать, что  $x \geq 0$ , а  $f(t)$  есть произвольная кусочно-гладкая функция, принадлежащая  $L'(0, \infty)$ . Ведь в этих формулах используются только значения  $f$  на полуоси  $[0, \infty)$ . Поясним это замечание подробнее.

Пусть задана кусочно-гладкая функция  $f \in L'(0, \infty)$  такая, что  $f(0) = f(0+0)$ . Продолжив ее на всю действительную ось четным образом, получим четную кусочно-гладкую функцию  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , для которой верна формула (2); в частности, она верна для  $x \geq 0$ .

Будем теперь считать, что для нашей кусочно-гладкой функции  $f \in L'(0, \infty)$  выполняется равенство  $f(0) = 0$  (вообще  $f(0+0) \neq f(0)$ ). Продолжим  $f$  нечетным образом на  $(-\infty, \infty)$ , получим нечетную кусочно-гладкую функцию  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , для которой верна формула (3); в частности, она верна для  $x \geq 0$ . Подчеркнем, что в формуле (3)  $f(0) = 0$ , в то время как в формуле (2) значение  $f(0) = f(0+0)$  может быть любым.

Интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ts dt, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ts dt.$$

называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье*. Из формул (2) и (3) непосредственно следует, что если к кусочно-гладкой функции  $f \in L'(0, \infty)$  применить последовательно два раза косинус- (или синус-) преобразование Фурье, то получим исходную функцию  $f$ . В этом смысле косинус- (синус-)преобразование Фурье является обратным самому себе.

#### § 4.14. Примеры

Справедливы равенства (пояснения ниже)

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \frac{\sin as}{s} ds.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs \frac{1 - \cos s}{s} ds.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & x < a, b < x \end{cases} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s(x-a) - \sin s(x-b)}{s} ds.$$

$$4) \int_0^{\infty} e^{-as} \cos sx ds = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$5) \int_0^{\infty} e^{-as} \sin sx ds = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$6) e^{-as} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xs}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0, 0 \leq s < \infty).$$

$$7) e^{-as} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{a^2 + x^2} \sin xs dx \quad (a > 0, 0 < s < \infty)$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s\pi}{1-s^2} \sin sx ds.$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{s\pi}{2}}{1-s^2} \cos sx ds$$

$$10) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \cos sx \left[ \frac{1}{(s-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(s+\beta)^2 + \alpha^2} \right] ds \quad (\alpha > 0).$$

$$11) f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x = \\ = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \sin sx ds}{[(s-\beta)^2 + \alpha^2][(s+\beta)^2 + \alpha^2]} \quad (\alpha > 0).$$

Пользуясь обычными методами теории неопределенных интегралов, не видно, как можно вычислить интегралы, стоящие в правых частях равенств 1) – 3). С другой стороны, функции 1) – 3) кусочно-гладкие и принадлежат к  $L'(-\infty, \infty)$  ( $f \in L'(-\infty, \infty)$ ). Поэтому к ним применима формула представления (1) § 4.13. Эта формула упрощается и имеет вид (2) § 4.13, если  $f$  – четная функция, а если  $f$  – нечетная, то она имеет вид (3) § 4.13. Например, функция (1) четная и потому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \, ds \int_0^a \cos ts \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \frac{\sin sa}{s} \, ds,$$

где надо считать, что в точках разрыва  $f$  выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Интегралы 4), 5) вычисляются интегрированием по частям.

Используя равенство 4), имеем

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xs}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \, dx \int_0^{\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = e^{-a|x|},$$

где последнее равенство имеет место в силу формулы (2) § 4.13, применимой, потому что  $e^{-a\lambda} \in L'(0, \infty)$  – гладкая функция. Итак, равенство 6) доказано.

Подобными рассуждениями получается формула 7) из 5) применением формулы (3) § 4.13.

Функция 8) нечетная кусочно-гладкая. Чтобы получить нужный интеграл, представим ее по формуле (3) § 4.13, где внутренний интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin st f(t) \, dt &= \int_0^{\pi} \sin st \sin t \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos t(s-1) - \cos t(s+1)] \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \pi(s-1)}{s-1} - \frac{\sin \pi(s+1)}{s+1} \right] = \frac{\sin \pi s}{1-s^2}. \end{aligned}$$

Представление функции 9) получается аналогично с применением формулы (2) § 4.13.

Функция 10) четная. Чтобы получить нужный интеграл, представим ее по формуле (2) § 4.13, где внутренний интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \beta t \cos s t dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\beta + s)t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\beta - s)t dt = \\ & = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{(\beta + s)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\beta - s)^2 + \alpha^2} \right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство записано в силу 4).

Аналогичные рассуждения проходят для функции 11) при использовании формулы (3) § 4.13.

Наконец, приведем еще один пример, методика вычисления которого отлична от предыдущих.

12) Найти косинус-преобразование функции  $\exp(-t^2)$ .

Пусть

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda = I(s).$$

Легко видеть, что (см. § 2.13, пример 3)

$$I(0) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Дифференцируя функцию  $I(s)$ , получаем

$$I'(s) = - \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda^2) \sin \lambda s d\lambda$$

(дифференцирование законно, так как последний интеграл равномерно сходится). Интегрируя по частям, производную  $I'(s)$  можно представить в виде  $(\lambda \exp(-\lambda^2) d\lambda = dv, \sin \lambda s = u)$

$$I'(s) = \frac{\sin \lambda s}{2} \exp(-\lambda^2) \Big|_{\lambda=0}^{\infty} - \frac{s}{2} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda =$$



$$= -\frac{s}{2} I(s).$$

Решая последнее дифференциальное уравнение первого порядка, имеем

$$\frac{dI}{I} = -\frac{s}{2} ds, \ln \left| \frac{I}{C} \right| = -\frac{s^2}{4}, I(s) = C \exp \left( -\frac{s^2}{4} \right).$$

Из условия  $I(0) = \sqrt{\pi}/2$  находим, что  $C = \sqrt{\pi}/2$ . Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left( -\frac{s^2}{4} \right).$$

### § 4.15. Приближение интеграла Фурье

Поясним физическую сторону понятия интеграла Фурье. Рассмотрим непериодическое движение, при котором ордината  $y$  некоторой точки есть функция  $y = f(x)$  от времени  $x$ .

Функцию  $f(x)$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} [a(s) \cos xs + b(s) \sin xs] ds = \\ &= \int_0^{\infty} [c(s) e^{-isx} + c(-s) e^{isx}] ds. \end{aligned}$$

При достаточно большом натуральном  $N$ , а затем при достаточно малых  $\Delta s (\Delta s = \Delta s_j)$  приближенно

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \int_0^N [a(s) \cos xs + b(s) \sin xs] ds = \\ &= \int_0^N [c(s) e^{-isx} + c(-s) e^{isx}] ds \approx \\ &\approx \sum_j [a(s_j) \cos xs_j + b(s_j) \sin xs_j] \Delta s = \end{aligned}$$

$$= \sum_j [c(s_j)e^{-ixs_j} + c(-s_j)e^{ixs_j}]\Delta s. \quad (1)$$

Первое приближение можно осуществить с любой точностью во всяком случае, если интегралы от  $a(s)$  и  $b(s)$  (следовательно, и от  $c(s)$ ) абсолютно сходятся на  $(0, \infty)$ , в частности, если функции  $a(s)$ ,  $b(s)$  (следовательно,  $c(s)$ ) равны нулю для  $s > s_0$ , где  $s_0$  – некоторое число. Второе приближение можно осуществить во всяком случае для значений  $x$ , принадлежащих к произвольному заданному отрезку  $[x_1, x_2]$ . При этом для заданного отрезка  $[x_1, x_2]$  подбираем нужные числа  $s_j$ , делящие  $[0, N]$  на равные части. Но тогда движение  $y = f(x)$  будет приближенно равно на отрезке времени  $[x_1, x_2]$  сумме гармонических колебаний – даже с общим периодом.

*Спектром периодической функции  $f(x)$*  называют совокупность ее коэффициентов Фурье. По спектру, в частности, видно, из каких нетривиальных (не равных тождественно нулю) гармоник состоит периодическое движение  $y = f(x)$ .

*Спектром непериодической функции  $f(x)$*  называются порождаемые ею функции  $a(s)$  и  $b(s)$  или функция  $c(s)$ .

Если  $a(s)$  и  $b(s)$  равны нулю вне интервала  $(p, q)$ , то сумма, приближающая  $f(x)$  по формуле (1), состоит из гармонических колебаний с частотами  $s_j \in (p, q)$ .

Функцию  $\tilde{f}(s) = \sqrt{2\pi} c(s)$  тоже называют спектром  $f$ .

## § 4.16. Сумма Фейера<sup>1</sup>

Выше мы рассмотрели ряды Фурье функции  $f(x)$  и установили достаточные признаки сходимости ряда Фурье к функции  $f(x)$ .

Математики Э. Дюбуа Реймонд и Л. Фейер построили примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых расходятся в одной точке или на множестве всех рациональных точек периода  $[-\pi, \pi]$ .

Таким образом, если про функцию  $f(x)$  известно только, что она непрерывна, то этого недостаточно, чтобы сказать, что ее ряд Фурье сходится. Для сходимости нужно наложить на функцию  $f$  еще некоторые добавочные условия. В наших признаках такими добавочными условиями были существование производной у функции  $f$  или

<sup>1</sup> Л. Фейер (1880–1959) – выдающийся венгерский математик.

же она должна удовлетворять условию Дирихле (быть кусочно-монотонной или, как еще говорят, иметь конечное число максимумов и минимумов).

Впрочем, эти условия могут быть заменены на более общие достаточные условия, на которых мы не будем останавливаться.

Класс периодических и непрерывных на всей действительной оси функций будем обозначать через  $C^*$ . В этом классе (пространстве) можно ввести норму:

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Свойства нормы (см. § 4.8) легко проверяются.

Итак, ряд Фурье функции  $f \in C^*$  не обязательно сходится к  $f(x)$  во всех точках  $x \in [-\pi, \pi]$ .

В связи с этим приобретает большое значение тот факт, что ряд Фурье произвольной функции  $f \in C^*$  суммируется к ней методом средних арифметических (см. § 9.16 нашей книги «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление») и притом равномерно на всей действительной оси.

Зададим функцию  $f \in C^*$  и составим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть

$$S_n = S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_2^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

–  $n$ -я частная сумма ряда Фурье функции  $f$  и

$$\sigma_n = \sigma_n(f; x) = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (1)$$

–  $n$ -я средняя арифметическая сумма Фурье функции  $f$ .

Функция  $\sigma_n(f; x)$  называется суммой Фейера порядка  $n$ .

Первой нашей задачей будет получить компактное выражение для  $\sigma_n$ . Так как (см. (16) § 4.12)

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_k(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n D_k(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos jt = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t / \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)$$

— ядро Дирихле.

Чтобы упростить выражение в квадратных скобках под знаком интеграла, предварительно подсчитаем сумму:

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x = \psi(x). \quad (2)$$

Умножая левую и правую части равенства (2) на  $2 \sin \frac{x}{2}$ ,

получим

$$\sum_{k=0}^n [\cos kx - \cos(k+1)x] = 2\psi(x) \sin \frac{x}{2}$$

или

$$\begin{aligned} [1 - \cos x] + [\cos x - \cos 2x] + \dots + [\cos nx - \cos(n+1)x] &= \\ &= 2\psi(x) \sin \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

$$1 - \cos(n+1)x = 2\psi(x) \sin \frac{x}{2}.$$

Из последнего равенства находим, что

$$\psi(x) = \frac{1 - \cos(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (3)$$

На основании (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_1^n D_k(x) &= \frac{1}{2} + \sum_1^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sum_0^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt, \quad (4)$$

где

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \quad (5)$$

Функция  $F_n(t)$  называется *ядром Фейера порядка  $n$* . Легко видеть, что

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_1^n \frac{n+1-k}{n+1} \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_1^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt. \quad (6)$$

Поэтому сумму  $\sigma_n(x)$  можно еще записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_1^n \frac{n+1-k}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_1^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \end{aligned} \quad (7)$$

**Замечание.** Из формулы (7) видно, что сумма Фейера  $\sigma_n(f; x)$  отличается от суммы Фурье  $S_n(f; x)$  функции  $f(x)$

тем, что каждый член  $(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  суммы  $S_n(f; x)$  умножен на число

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Отметим следующие свойства ядра Фейера  $F_n(t)$ :

1)  $F_n(t)$  — неотрицательный, четный тригонометрический полином порядка  $n$  (см. (5) и (6));

$$2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1 \quad (8)$$

(см. (6), учесть ортогональность функций  $\cos kx$  ( $k = 1, \dots, n$ ) к единице);

3) для всякого числа  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt &\leq \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2(n+1) \left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2} \int_{\delta}^{\pi} dt = \\ &= \frac{\pi - \delta}{2(n+1) \left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

**Теорема 1 (Фейера).** Для любой непрерывной на действительной оси функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  (т. е.  $f \in C^*$ ) ее сумма Фейера порядка  $n$  равномерно стремится к ней при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{C^*} = \max_x |f(x) - \sigma_n(f; x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

**Доказательство.** В силу свойства 2) ядра Фейера имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - f(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу (10) и свойства 1) ядра  $F_n(t)$  имеем

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta > 0$  — пока произвольное число ( $0 < \delta < \pi$ ).

Так как по условию теоремы функция  $f(x)$  непрерывна, то она обязательно ограничена

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Тогда

$$|f(x+t) - f(x)| \leq 2M, \quad (12)$$

для любых  $x$  и  $t$ .

Далее функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ , поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать число  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (13)$$

при  $|t| \leq \delta$  и любых  $x$ ,  $(x+t) \in [-\pi, \pi]$ .

Теперь, взяв в (11)  $\delta$  такое, как указано в (13), на основании свойства ядра 2), с учетом (12) и (13), получаем

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; x) - f(x)| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь при достаточно большом  $n_0$  на основании свойства 3) ядра  $F_n(t)$  второе слагаемое справа в последнем неравенстве при  $n > n_0$  можно сделать меньшим  $\varepsilon/2$ . Итак, окончательно получаем

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0, x \in [-\pi, \pi]).$$

Таким образом,

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{C^*} = \max_x |\sigma_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n > n_0), \quad (14)$$

т. е. последовательность  $\{\sigma_n(f; x)\}$  равномерно сходится на  $[-\pi, \pi]$  к функции  $f(x)$ . Теорема доказана.

Мы уже отмечали выше, что средние арифметические числового ряда могут стремиться к пределу, в то время как сам ряд может расходиться (см. § 9.16, пример 2 в нашей книге «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление»). Это явление как раз имеет место для рядов Фурье непрерывных функций.

Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на множестве всех рациональных чисел (счетное множество), однако это не мешает тому, как это мы доказали, что средние арифметические суммы Фурье для любой непрерывной функции  $f$  сходятся к  $f$  и даже равномерно.

**Следствие (теорема Вейерштрасса).** Для любой периодической непрерывной на действительной оси функции  $f(x)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется тригонометрический многочлен  $T_n(x)$  такой, что

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Для доказательства достаточно в качестве  $T_n(x)$  взять сумму Фейера  $\sigma_n(f; x)$  при достаточно большом  $n$ .

## § 4.17. Полнота систем функций в $C$ и $L'_2$

Систему непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \quad (1)$$

называют *полной* в пространстве  $C[a, b]$  непрерывных функций, если для любой функции  $f \in C[a, b]$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется конечная линейная комбинация из этих функций

$$\sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(x). \quad (2)$$

такая, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$



Говорят еще, что система (1) полна в пространстве  $L'_2(a, b)$ , если для любой функции  $f \in L'_2(a, b)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация (2) такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k \right\|_{L'_2} = \left( \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon. \quad (4)$$

Если система (1) полна в  $C[a, b]$ , то она полна также в  $L'_2(a, b)$ .

В самом деле, пусть  $F(x) \in L'_2(a, b)$ . Зададим  $\varepsilon > 0$  и подберем непрерывную функцию  $f(x)$  (см. ниже пример) так, чтобы

$$\left( \int_a^b |F(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

А для последней подберем сумму (2), чтобы выполнялось неравенство (3). Тогда

$$\begin{aligned} & \left( \int_a^b \left| F(x) - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \int_a^b |F(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \\ & < \varepsilon + \varepsilon \sqrt{b-a} = \varepsilon(1 + \sqrt{b-a}), \end{aligned}$$

где правая часть может быть взята как угодно малой.

В § 4.9 мы рассматривали произвольную ортонормальную на отрезке  $[a, b]$  систему функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  и называли ее полной в  $L'_2(a, b)$ , если ряд Фурье любой функции  $f \in L'_2(a, b)$  по этой системе сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического.

Таким образом, в случае ортонормированной системы

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \quad (5)$$

мы имеем два определения полноты в  $L'_2(a, b)$ . Они эквивалентны. В самом деле, пусть ортонормированная система (5) полна в  $L'_2(a, b)$  в смысле § 4.9, и пусть  $f \in L'_2(a, b)$ .

Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a,b)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

и при достаточно большом  $n = n_0$  и  $c_k = (f, \varphi_k)$  получим неравенство (4). А это доказывает, что система (5) полна в смысле второго определения.

Обратно, если система (5) полна в смысле второго определения и задана функция  $f \in L'_2(a, b)$ , то для всякого

$\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация  $\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k$ , такая, что

(пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \varepsilon > \left\| f - \sum_0^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\|_{L'_2} &\geq \left\| f - \sum_0^{n_0} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2} \geq \\ &\geq \left\| f - \sum_0^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2} \end{aligned}$$

для любого  $n \geq n_0$ , второе и третье неравенство этой цепи следует из теоремы в § 4.9 получим, что ряд Фурье функции  $f(x) \in L'_2(a, b)$  по системе (5) сходится к ней в смысле среднего квадратического.

**Пример.** На рис. 121а изображена функция  $F(x)$ , разрывная в точке  $x_0$ , а на рис. 121б она видоизменена в  $\delta$ -окрестности  $x_0$ , так что получилась непрерывная функ-

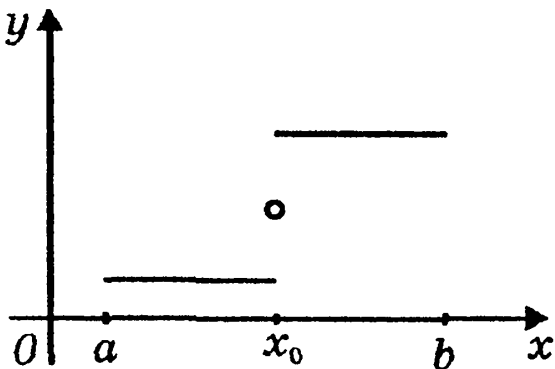


Рис. 121а

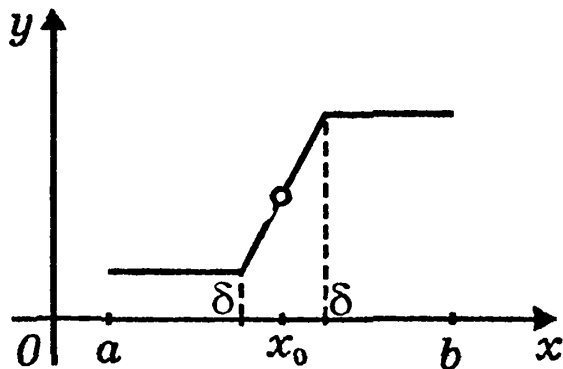


Рис. 121б

ция  $F_\delta(x) = f(x)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta > 0$  так, что

$$\left( \int_a^b |F(x) - F_\delta(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

В § 4.9 было сформулировано без доказательства важное утверждение о том, что ряд Фурье функции  $f \in L'_2*$  по тригонометрической системе сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического. После того как мы доказали теорему Вейерштрасса (см. § 4.16), это утверждение можно полностью обосновать.

В самом деле, мы уже пользовались теоремой 1 § 4.9, утверждающей справедливость равенства

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|,$$

где  $c_k$  — коэффициенты Фурье функции  $f \in L'_2(a, b)$  по ортонормированной системе  $\{\varphi_k\}$ . Отметим, что это равенство имеет место и для произвольной ортогональной, не обязательно нормальной системы. В этом случае коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Теорема Вейерштрасса выражает тот факт, что эта система полна в  $C^*$ , но тогда, как мы знаем, она полна в  $L'_2*$ .

А это и означает, что ряд Фурье по тригонометрической системе любой функции  $f \in L'_2*$  сходится к ней в смысле среднего квадратического.

## § 4.18. Сведения из теории кратных рядов Фурье

Будем рассматривать функции  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , от многих переменных, заданных на некотором  $n$ -мерном прямоугольнике

$$\Delta = \{a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\},$$

где  $a_j, b_j$  — действительные числа.

Из теории кратных интегралов (см. теорему 3 § 2.4) следует, что если интегрируемая на  $\Delta$  функция  $f(x)$ , представима в виде произведения интегрируемых функций от одного переменного

$$f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j),$$

то

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} f_j(x_j) dx_j, \quad (1)$$

где  $\Delta_j = [a_j, b_j]$ .

Прямоугольник  $\Delta$  можно рассматривать как прямое произведение отрезков  $\Delta_j$  (см. сноску 2 на с. 191):

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_n.$$

Отметим, что в равенстве (1) слева стоит  $n$ -кратный интеграл, а справа стоят одномерные интегралы Римана от функций  $f_j(x_j)$ , заданных на  $\Delta_j$ .

Функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \quad (k_j = 0, \pm 1, \dots; j = 1, 2, \dots, n),$$

как мы знаем имеют период  $2\pi$  по переменной  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Эти функции (от одного переменного  $x_j$ ) непрерывны на всей оси  $x_j$  и на периоде  $[-\pi, \pi]$ , а следовательно, интегрируемы по Риману на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Кроме того,

нам известно, что функции  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j}$  образуют ортонормальную систему

малую систему  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \right\}$  на  $[-\pi, \pi]$ , т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il_j x_j} dx_j = \begin{cases} 0, & k_j \neq l_j, \\ 1, & k_j = l_j. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad kx = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

$$\Delta_* \equiv \Delta_*^{(n)} = \{-\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда в силу (1) и (2) функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \dots e^{ik_n x_n} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \quad (3)$$

$$(k_j = 0, \pm 1, \dots; j = 1, \dots, n)$$

от  $n$  переменных будут ортонормальны на кубе  $\Delta_*$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ilx} dx = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j)x_j} dx_j = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Под равенством целочисленных векторов  $k$  и  $l$  мы, как обычно, понимаем равенство соответствующих их координат и  $k \neq l$  означает, что векторы  $k$  и  $l$  отличаются хотя бы одной координатой.

Будем рассматривать комплексные функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  по каждой из переменных  $x_j, j = 1, \dots, n$ .

Символ  $C^*$  будет обозначать класс (пространство) непрерывных функций с нормой (см. § 4.8)

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in \Delta_*} |f(x)|.$$

Множество всех кусочно-непрерывных периодических функций, для которых введено скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_{\Delta_*} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (4)$$

мы будем обозначать  $L_2^{1*} \equiv L_2'(\Delta_*)$  и называть пространством  $L_2^{1*}$ . Норма в этом классе (пространстве) вводится так:

$$\|f\| = \|f\|_{L_2^{1*}} = \left( \int_{\Delta_*} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тот факт, что  $f(x)$  — кусочно-непрерывная функция, означает следующее: куб  $\Delta_*$  (период) можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно-гладких поверхностей так, что на каждой части функция  $f(x)$  непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы

Все свойства нормы (см. § 4.8) для пространства  $L'_2$ \* выполнены. Под нулевой функцией ( $f = 0$ ) мы понимаем функцию, равную нулю всюду на  $\Delta_*$ , кроме конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Например, в случае функций от двух переменных, мы допускаем, что нулевая функция  $f(x_1, x_2)$  может быть не равна нулю в конечном числе точек  $\Delta_*$  или на конечном числе кусочно-гладких кривых.

Отметим, что  $n$ -мерная мера Жордана указанных поверхностей равна нулю, поэтому  $n$ -кратный интеграл от нулевой функции по  $\Delta_*$  равен нулю.

Пусть теперь функция  $f(t)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , периода  $2\pi$  по каждой из переменных и известно, что ее можно разложить в кратный ряд:

$$f(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \equiv \sum c_k e^{ikt}, \quad (5)$$

где последняя сумма распространена на всевозможные векторы  $k = (k_1, \dots, k_n)$  с целыми координатами.

Спрашивается, как определить по функции  $f(t)$  коэффициенты  $c_k$ . Здесь можно поступить таким же образом, как это мы делали в § 4.3 в одномерном случае, т. е. для функции  $f$  от одного действительного переменного.

Если ряд (5) равномерно сходится на  $\Delta_*$ , то (аналогично, как и для функции одного переменного, см. § 4.6)

$$c_k \equiv c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (6)$$

Числа  $c_k$ , вычисляемые по формуле (6), называют *коэффициентами Фурье функции  $f(t)$* , а ряд (5), в который вместо  $c_k$  подставлены коэффициенты Фурье, называют *рядом Фурье функции  $f(t)$*  в комплексной форме (см. § 4.11).

Итак, если функция  $f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$  представима в виде суммы ряда (5), равномерно сходящегося на  $\Delta_*$ , то числа  $c_k$  необходимо являются коэффициентами Фурье функции  $f(t)$ .

Если в ряде (5) коэффициенты  $c_k$  вычислены по формулам (6), то ряд (5) будем называть рядом Фурье функции  $f(t)$  независимо от того, сходится он к  $f(t)$  или нет. В этом случае будем писать

$$f(t) \sim \sum e_k e^{ikt}. \quad (7)$$

Если функция  $f \in C^*$ , то ряд (7) не обязательно сходится к  $f(t)$  во всех точках  $t \in \Delta_*$  (см. § 4.16).

Зададим вектор  $N = (N_1, \dots, N_n)$ , где  $N_j$  — натуральные числа, и определим соответствующую ему частичную сумму Фурье функции  $f$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S_N(f; \mathbf{x}) &= \\ &= \sum_{\substack{|k_j| \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} c_k e^{ikx} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{\substack{|k_j| \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} e^{-ik(t-x)} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^n D_{N_j(t_j-x_j)} f(t) dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$D_{N_j}(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N_j} \cos ku = \frac{\sin\left(N_j + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

— ядро Дирихле порядка  $N_j$ . Здесь мы воспользовались формулой Эйлера  $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ .

В частности, если  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ , то

$$S_N(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^n D_{N_1(t_j-x_j)} f(t) dt. \quad (8')$$

Многомерный аналог суммы Фейера имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_N(f; \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k_1=0}^{N_1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n} S_k(f; \mathbf{x})}{(N_1+1)\dots(N_n+1)} = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(t - \mathbf{x}) f(t) dt = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) f(u + \mathbf{x}) du, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_N(u) = \prod_{j=1}^n F_{N_j}(u_j), \quad F_{N_j}(t) = \frac{1}{2(N_j+1)} \left( \frac{\sin \frac{N_j+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

— ядро Фейера порядка  $N_j$ . Если  $N_1 = \dots = N_n$ , то в формуле (9) ядро  $\Phi_N(u)$  несколько упростится.

Так как функции  $e^{ikt}$  при  $k \neq 0$  ортогональны к 1, то

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) du = 1. \quad (10)$$

Далее, если  $\Delta_\varepsilon = \{|u_j| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, n\}$ , то

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du \leq \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) du = 1.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du \rightarrow 0 \quad (11)$$

при  $N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty$ .

Докажем последнее свойство для двумерного случая

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du = \\ & = \frac{1}{\pi^2} \left( \int_{|u_1| \leq \varepsilon} \int_{\varepsilon \leq |u_2| \leq \pi} + \int_{\varepsilon \leq |u_1| \leq \pi} \int_{|u_2| \leq \varepsilon} \right) \Phi_N(u) du \leq \\ & \leq c \left( \int_{\varepsilon \leq |u_2| \leq \pi} F_{N_2}(u_2) du_2 + \int_{\varepsilon \leq |u_1| \leq \pi} F_{N_1}(u_1) du_1 \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $N_1 \rightarrow \infty$  и  $N_2 \rightarrow \infty$  (см. свойство 3) ядра Фейера § 4.16).

**Теорема 1.** Если функция  $f(t) \in C^*$ , то

$$\|f(x) - \sigma_N(f; x)\|_{C^*} \rightarrow 0 \quad (N_j \rightarrow \infty, j = 1, \dots, n).$$

**Доказательство.** В силу свойства (10) ядра  $\Phi_N(u)$  имеем

$$\sigma_N(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} [f(x+t) - f(x)] \Phi_N(t) dt.$$

Отсюда

$$|\sigma_N(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt =$$



$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\delta} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \\ + \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt,$$

где  $\delta > 0$  — пока произвольное число ( $0 < \delta < \pi$ ).

Так как функция  $f(x)$  по условию теоремы непрерывна на  $\Delta_*$ , то она ограничена и равномерно непрерывна на  $\Delta_*$ .

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in \Delta_*); \quad (12)$$

для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad (13)$$

при  $|t_j| < \delta$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и любых  $x, (x+t) \in \Delta_*$ .

Теперь, взяв  $\delta$  такое, как указано в (13), на основании свойств ядра  $\Phi_N(t)$  получаем

$$|\sigma_N - f| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\delta} \Phi_N(t) dt + \frac{2M}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) dt \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) dt.$$

Теперь для вектора  $N^0$  с достаточно большими координатами, на основании свойства (11), второе слагаемое справа в последнем неравенстве можно сделать при  $N > N^0$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) меньшим  $\varepsilon/2$ .

Тогда окончательно получим

$$|\sigma_N(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или

$$\|\sigma_N(f; x) - f(x)\|_{C^*} < \varepsilon$$

при  $N > N^0$ , ( $j = 1, \dots, n$ )  $\forall x \in \Delta_*$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Из теоремы 1 следует, что система функций (3) полна в  $C^*$ , а следовательно, и в  $L'_2$  (см. § 4.17).

**З а м е ч а н и е 2.** Мы уже отмечали выше, что кратный ряд Фурье непрерывной функции не обязательно сходится к ней во всех точках  $\Delta_*$ . Однако кратная сумма Фейера  $\sigma_N(f; x)$  непрерывной периодической функции  $f(x)$ , как мы доказали выше, сходится к  $f(x)$  во всех точках  $x = (x_1, \dots, \dots, x_n) \in \Delta_*$ .

Справедлива

**Теорема 2.** Ряд Фурье (7) функции  $f \in L'_2$  сходится в  $f(x)$  в смысле среднего квадратического

$$\|f(x) - S_N(f; x)\|_{L'_2} \rightarrow 0 \quad (N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty)$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_{L'_2}^2 = (2\pi)^n \sum |c_k|^2.$$

Доказательство этой теоремы можно провести, как в одномерном случае (см. § 4.9, 4.17), воспользовавшись замечанием 1 о полноте системы (3).

Будем теперь рассматривать ряд Фурье (7) в двумерном случае. Если воспользоваться формулами Эйлера  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ , то (7) формально преобразуется в ряд

$$\begin{aligned} f(x, y) \sim & \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k0} \cos kx + d_{k0} \sin kx) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{0l} \cos ly + c_{0l} \sin ly) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly) + \\ & + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \sin ly), \end{aligned} \quad (14)$$

где мы положили

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \cos lv \, du \, dv, \\ b_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \sin ku \cos lv \, du \, dv, \\ c_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \sin lv \, du \, dv, \\ d_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \sin ku \sin lv \, du \, dv. \end{aligned} \quad (15)$$

**Замечание 3.** Если  $f(u, v)$  — действительная функция, то  $a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl}$  — действительные числа.

Отметим, что к ряду (14) мы могли бы прийти и непосредственно, исходя из ортогональной на  $\Delta_* = \{-\pi \leq x, y \leq \pi\}$  системы функций

$$\begin{aligned} \cos kx \cos ly, \sin kx \cos ly, \cos kx \sin ly, \sin kx \sin ly \\ (k, l = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

Ряд (14), где числа  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$ ,  $c_{kl}$ ,  $d_{kl}$  вычисляются по формулам (15), называется *рядом Фурье функции  $f(x, y)$  по тригонометрической системе функций (16)*. Числа (15) называются *коэффициентами Фурье функции  $f(x, y)$  по системе (16)*.

Таким образом, кратный ряд Фурье можно записывать как в комплексной форме (7), так и в виде кратного тригонометрического ряда (14).

Рассматривая снова  $n$ -мерный случай, в предположении, что

$$f \in C^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*,$$

коэффициент Фурье  $c_k$ , где  $k_n \neq 0$ , можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} e^{-ikt} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \dots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_n t_n} f(t) dt_n; \end{aligned}$$

интегрируя по частям в последнем интеграле ( $u = f(t)$ ,  $e^{-ik_n t_n} dt_n = dv$ ), получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \dots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ik_n} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f(t)}{\partial t_n} dt_n = \\ &= \frac{1}{ik_n} c_k \left( \frac{\partial f}{\partial t_n} \right) \end{aligned}$$

$$(\Delta_*^{n-1}) = \{-\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Вообще, если  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — заданный целый неотрицательный вектор и  $f^{(s)} \in C^*$  для любого неотрицательного целого вектора  $s \leq \lambda$  ( $s_j \leq \lambda_j, j = 1, \dots, n$ ), то после соответствующего применения процесса интегрирования по

частям (с учетом периодичности функции  $f$  и всех ее производных) получим

$$c_k(f) = \frac{1}{i^{|\lambda|} k^\lambda} c_k(f^{(\lambda)}), \quad (17)$$

где

$$|\lambda| = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad k^\lambda = k_1^{\lambda_1} k_2^{\lambda_2} \dots k_n^{\lambda_n},$$

причем мы считаем, что если  $k_j=0, \lambda_j=0$ , то  $k_j^{\lambda_j} = 0^0 = 1$ .

Числа  $c_k(f^{(\lambda)})$  – коэффициенты Фурье производной

$$f^{(\lambda)}(t) = \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \dots \partial t_n^{\lambda_n}} = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \dots \partial t_n^{\lambda_n}}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  – вектор с целыми положительными компонентами и функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in C^*$  вместе со своими частными производными  $f^{(k)}$  порядка  $k \leq \lambda$  ( $k_j \leq \lambda_j, j = 1, \dots, n$ ) и выполняются неравенства

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta} |f^{(k)}(x)|^2 dx \leq M^2 \quad (18)$$

для любого вектора  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , имеющего компоненты  $l_j$ , равные нулю или же  $\lambda_j$ .

Тогда сумма Фурье  $S_N(f; x)$  ( $N = (N_1, \dots, N_n)$ ) функции  $f$  отклоняется от  $f(x)$  с оценкой

$$|f(x) - S_N(f; x)| \leq cM \sum_{j=1}^n (N_j + 1)^{-\lambda_j + \frac{1}{2}}, \quad (19)$$

где  $c$  не зависит от  $M$  и  $N_j$  и зависит только от  $\lambda$ .

**Доказательство.** Для простоты оценим остаток ряда Фурье функции в двумерном случае

$$\rho_N(f; x) = \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \right) c_k e^{ikx}.$$

Если рассматривать плоскость точек  $(k_1, k_2)$  (рис. 122), то в остаточный член  $\rho_n(f; x)$  входят члены ряда Фурье, отвечающие точкам  $(k_1, k_2)$  с целочисленными координатами из заштрихованной части.

Учитывая, что  $|e^{ikx}| = 1$ , имеем

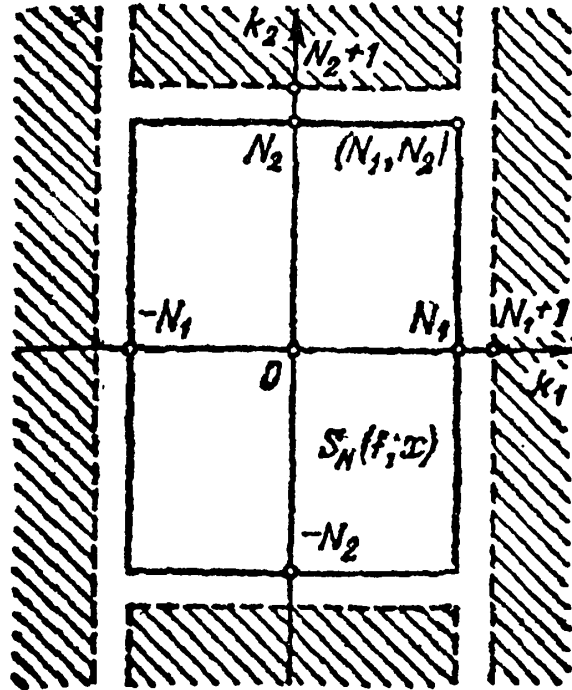


Рис. 122

$$\begin{aligned}
 |\rho_N(f; x)| &\leq \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \right) |c_k| = \\
 &= \sum_{|k_1| > N_1} |c_{k_1, 0}| + \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} |c_k| + \\
 &+ \sum_{|k_2| > N_2} |c_{0, k_2}| + \sum_{1 \leq |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} |c_k|.
 \end{aligned}$$

В силу формулы (17) получаем

$$\begin{aligned}
 |\rho_N(f; x)| &\leq \sum_{|k_1| > N_1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}} \left| c_{k_1, 0} \left( \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right) \right| + \\
 &+ \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right| + \\
 &+ \sum_{|k_2| > N_2} \frac{1}{|k_2|^{\lambda_2}} \left| c_{0, k_2} \left( \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right| + \\
 &+ \sum_{1 \leq |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Буняковского для сумм (см. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 6, (7)), получаем (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
 & |\rho_N(f; \mathbf{x})| \leq \\
 & \leq \left( \sum_{|k_1| > N_1} k_1^{-2\lambda_1} \right)^{1/2} \left( \sum_{|k_1| > N_1} \left| c_{k_1, 0} \left( \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 & \quad + \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} k_1^{-2\lambda_1} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \times \\
 & \quad \times \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 & \quad + \left( \sum_{|k_2| > N_2} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \left( \sum_{|k_2| > N_2} \left| c_{0, k_2} \left( \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 & \quad + \left( \sum_{1 \leq |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} k_1^{-2\lambda_1} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \times \\
 & \quad \times \left( \sum_{1 \leq |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Теперь в силу равенства Парсеваля и (18), а также неравенств  $\sum_{k > N} k^{-\alpha} \leq cN^{1-\alpha}$ ,  $\sum_{k \geq 1} k^{-\alpha} \leq c_1$  при  $\alpha > 1$  имеем ( $\lambda_j \geq 1, j = 1, \dots, n$ )

$$|\rho_N(f; \mathbf{x})| \leq c(N_1 + 1)^{1/2-\lambda_1} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right\|_{L_2^*} +$$

$$\begin{aligned}
& + c(N_1 + 1)^{1/2-\lambda_1} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} + \\
& + c(N_2 + 1)^{1/2-\lambda_2} \left\| \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} + \\
& + c(N_2 + 1)^{1/2-\lambda_2} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L_2'^*} \leq \\
& \leq cM[(N_1 + 1)^{1/2-\lambda_1} + (N_2 + 1)^{1/2-\lambda_2}].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\rho_N(f; \mathbf{x})| \leq cM[(N_1 + 1)^{1/2-\lambda_1} + (N_2 + 1)^{1/2-\lambda_2}], \quad (20)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $M$  и  $N_1, N_2$ .

В  $n$ -мерном случае оценку остатка можно провести подобным образом.

Оценка (20) говорит о том, что ряд Фурье функции  $f(\mathbf{x})$  сходится равномерно на  $\Delta_*$  при  $\lambda_j \geq 1, j = 1, \dots, n$ .

В силу теоремы 2 ряд Фурье функции  $f$  сходится к  $f(\mathbf{x})$  в смысле среднего квадратического. В таком случае он сходится равномерно именно к функции  $f(\mathbf{x})$  (см. ниже лемму 1), и потому

$$|\rho_N(f; \mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - S_N(f; \mathbf{x})| \leq cM \sum_{j=1}^n (N_j + 1)^{1/2-\lambda_j},$$

и теорема доказана.

**Следствие.** Если функция  $f$  и ее частные производные вида  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  принадлежат к  $C^*$ , то кратный ряд Фурье функции  $f$  сходится равномерно на  $\Delta_*$  к функции  $f(\mathbf{x})$ .

Ведь если эти частные производные непрерывны, то их квадраты интегрируемы на  $\Delta_*$  и верны оценки (18) при некоторой постоянной  $M$  и  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ .

**Лемма.** Если ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + \dots$$

непрерывных на области  $\Omega \subset R_n$  функций сходится в смысле среднего квадратического к непрерывной функции  $S(\mathbf{x})$  и в то же время он сходится равномерно на  $\Omega$  к функции  $\varphi(\mathbf{x})$ , то для всех точек  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$S(x) = \varphi(x).$$

Доказательство. Пусть  $S_N(x)$  – сумма первых  $N$  членов ряда,  $V \subset \Omega$  – произвольный шар и

$$\mathcal{K}_N = \max_{x \in V} |\varphi(x) - S_N(x)|.$$

По условию леммы  $\mathcal{K}_N \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Поэтому в силу неравенства треугольника (см. § 4.8)

$$\begin{aligned} & \left( \int_V |S(x) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \int_V |S(x) - S_N(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_V |S_N(x) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \int_V |S(x) - S_N(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \mathcal{K}_N \sqrt{mV} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, левая часть этой цепи равна нулю (она не зависит от  $N$ ):

$$\int_V |S(x) - \varphi(x)|^2 dx = 0.$$

Далее, так как по условию функция  $S(x)$  непрерывна на  $\Omega$ , а  $\varphi(x)$  непрерывна на  $\Omega$ , как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, то для всех  $x \in V$

$$S(x) - \varphi(x) \equiv 0.$$

Если предположить, что существует хотя бы одна точка  $x^0$ , в которой

$$[S(x^0) - \varphi(x^0)]^2 > 0,$$

то мы получили бы, что

$$\int_V [S(x) - \varphi(x)]^2 dx > 0$$

(см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 6.2, теорема 8).

Далее, так как  $V$  – произвольный шар, входящий в область  $\Omega$  (открытое связное множество), то

$$S(x) \equiv \varphi(x) \quad (\forall x \in \Omega),$$

и лемма доказана.



**Теорема 4.** Для функции  $f \in C^*$  при произвольном  $\eta > 0$  имеет место равенство

$$S_N(f; \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^n D_{N_j}(u_j) [f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{u} + o(1) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (21)$$

равномерно на любой области  $\Omega \subset \Delta_*$ .

Здесь множество  $K_\eta$  (крест) есть объединение множеств

$$\Omega_{j,n} = \{|u_j| < \eta\} \quad (j = 1, \dots, n), \text{ т. е. } K_\eta = \bigcup_{j=1}^n \Omega_{j,n}. \text{ Символ}$$

$N \rightarrow \infty$  означает, что  $N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty$ .

Теорема имеет место и в случае, если функция  $f$  просто интегрируема (по Риману или Лебегу). Мы не будем доказывать данную теорему, отметим лишь, что при ее доказательстве придется использовать свойства кратных интегралов Фурье, аналогичные свойствам одномерных интегралов Фурье (см. формулы (9) – (11) § 4.12).

Заметим еще, что в формуле (21) нельзя заменить множество (крест)  $K_\eta$  на куб  $\Delta_\eta = \{|u_j| < \eta, j = 1, \dots, n\}$ , и в этом проявляется существенное различие между рядами Фурье функций многих переменных и функций одной переменной.

Формулу (21) можно использовать при получении различных достаточных признаков сходимости кратного ряда Фурье к функции  $f(\mathbf{x})$  в зависимости от свойств функции  $f(\mathbf{x})$ .

## § 5.1. Температура тела

Рассмотрим физическое тело  $\Omega$ . Температуру его в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  обозначим через

$$u = u(x, y, z, t).$$

Покажем, что функция  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad ((x, y, z) \in \Omega) \quad (1)$$

или, если воспользоваться обозначением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (1')$$

которое называется *уравнением теплопроводности*. Оно является примером линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Рассмотрим элементарный кубик  $\sigma$  в теле  $\Omega$  (рис. 123). Количество тепла, проходящее через левую грань  $\sigma$  справа налево за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ , равно с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент теплопроводности тела, который мы считаем постоянным в любой его точке. Дело в том, что указанное количество тепла, очевидно, пропорционально числу  $\alpha$ , площади  $\Delta y \Delta z$  рассматриваемой грани, приращению времени  $\Delta t$  и скорости изменения температуры в направлении оси  $x$ , равной частной про-

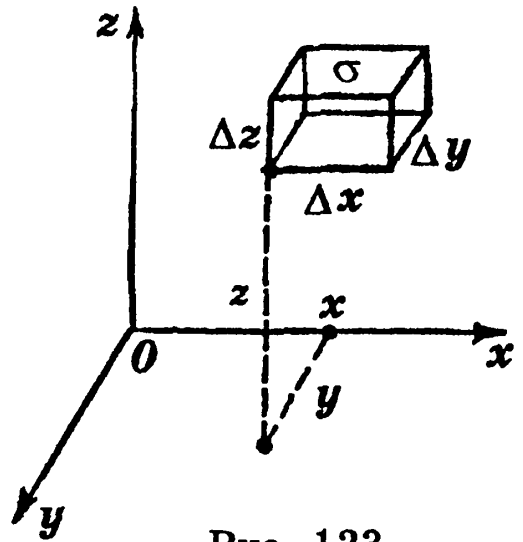


Рис. 123

изводной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Частная производ-

ная меняется в пределах грани, но, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно считать, что она всюду

на этой грани равна  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $(x, y, z, t)$ .

Количество тепла, проходящее через правую грань  $\sigma$  справа налево, очевидно, равно

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Количество же тепла, вошедшее в куб  $\sigma$  через левую и правую его грани за указанный промежуток времени, равно

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t - \\ - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Общее количество тепла, вошедшее в  $\sigma$  за время  $(t, t + \Delta t)$ , очевидно, равно сумме количеств тепла, вошедших за это время через все грани  $\sigma$ :

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (2)$$

Но это число (количество тепла) равно также

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \quad (3)$$

где  $\beta$  – удельная теплоемкость тела, которую мы считаем постоянной во всех его точках.

Приравнивая величины (2), (3), после сокращений получим дифференциальное уравнение (1), где

$$a^2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Итак, мы показали, что температура тела  $\Omega$  есть функция  $u = u(x, y, z, t)$ , удовлетворяющая уравнению (1), где  $a^2$  – положительная константа, физический смысл которой был выяснен выше. Впрочем, мы ограничились тем случаем, когда во всех точках тело имеет постоянную удельную теплоемкость и постоянный коэффициент теплопроводности.

Дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти среди них определенное решение, надо наложить на функцию  $u$  дополнительные условия. Обычно это так называемые *начальные и граничные условия*.

Ниже мы рассмотрим несколько математических задач, связанных с этим вопросом.

## § 5.2. Задача Дирихле

Распределение тепла в теле называется *стационарным*, если температура  $u$  тела зависит от положения точки  $(x, y, z)$ , но не зависит от времени  $t$ , т. е.

$$u = u(x, y, z).$$

В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0.$$

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $u(x, y, z)$  называется *гармонической* на области  $\Omega$ , если она имеет непрерывные частные производные второго порядка на  $\Omega$  и удовлетворяет на  $\Omega$  уравнению

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *уравнением Лапласа*<sup>1</sup>. Справедлива

<sup>1</sup> П. С. Лаплас (1749–1827) – выдающийся французский математик,

**Теорема 1.** Пусть ограниченная область  $\Omega$  пространства имеет кусочно-гладкую границу (поверхность)  $\Gamma$ , на которой задана непрерывная функция  $f(x, y, z)$ . Тогда существует на замыкании  $\bar{\Omega}$  единственная непрерывная функция  $u(x, y, z)$ , гармоническая на  $\Omega$ , такая, что

$$u|_{\Gamma} = f(x, y, z).$$

Теорема 1 имеет очевидную физическую интерпретацию. Если на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$  все время поддерживать температуру  $u$ , равную  $u|_{\Gamma} = f(x, y, z)$ , где  $f(x, y, z)$  – заданная непрерывная на  $\Gamma$  функция, то внутри тела установится вполне определенная (единственная) температура  $u(x, y, z)$ . Это утверждение с физической точки зрения надо считать очевидным. Но оно может быть доказано и математически. Эта задача, называемая *задачей Дирихле*, исследована очень хорошо, при этом даются различные приближенные методы ее решения.

Задача Дирихле имеет большое практическое применение и в плоском случае. В плоском случае она формулируется так.

На кусочно-гладкой границе  $\Gamma$  плоской области  $\Omega$  задана непрерывная функция  $f(x, y)$ . Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  и гармоническую на  $\Omega$ , т. е. имеющую вторые непрерывные частные производные и удовлетворяющую уравнению Лапласа на  $\Omega$ :

$$\Delta u = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Эта задача решается положительно: на  $\bar{\Omega}$  существует и притом единственная функция  $u(x, y)$ , удовлетворяющая требованиям этой задачи.

Особенно важны те случаи, когда задача Дирихле решается *эффективно*.

Ниже мы даем эффективное решение задачи Дирихле для круга.

### § 5.3. Задача Дирихле для круга

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma$  есть открытый единичный круг с центром в начале прямоугольной системы координат  $x, y$  и на его границе  $\Gamma$  задана непрерывная (периода  $2\pi$ ) функция  $f(\theta)$ , где  $\theta$  – полярный угол точки  $\Gamma$ . Тогда на замыкании  $\bar{\sigma} = \sigma + \Gamma$  круга  $\sigma$  существует и притом един-

ственная функция  $u(x, y)$ , непрерывная на  $\bar{\sigma}$ , гармоническая на  $\sigma$  и равная  $f(\theta)$  на  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = f(\theta). \quad (1)$$

В полярных координатах  $(\rho, \theta)$  функция  $u = u(\rho, \theta)$  записывается в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \begin{cases} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{cases} d\theta \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

— коэффициенты Фурье функции  $f(\theta)$ .

Мы докажем теорему 1 в предположении, что функция  $f(\theta)$  имеет вторую непрерывную производную, хотя теорема верна и если  $f(\theta)$  просто непрерывна.

Разложим функцию  $f(\theta)$  в ряд Фурье

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Так как  $f(\theta)$  имеет вторую непрерывную производную, то

$$|a_k| \leq \frac{2M}{k^2}, \quad |b_k| \leq \frac{2M}{k^2} \quad (k \neq 0), \quad (3)$$

где константа  $M = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |f''(t)|$  (см. § 4.7). Имеем

$$|\rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)| \leq |a_k| + |b_k| \quad (0 \leq \rho \leq 1),$$

и так как ряд

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд (2) равномерно сходится на  $\bar{\sigma}$ . Но тогда  $u(\rho, \theta)$  есть непрерывная на  $\bar{\sigma}$  функция, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Кроме того,

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = f(\theta),$$

т. е. выполняется свойство (1).

Каждый член ряда (2) удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$$

(см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.9, пример 3). Кроме того, имеют место равенства ( $0 \leq \rho < 1$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \rho^{k-2} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \rho^k (-a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Почленное дифференцирование ряда (2) законно, потому что для любого положительного  $\rho_0 < 1$  члены, например, третьего ряда (4) не превышают соответственно

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M \rho_0^k \quad (0 \leq \rho \leq \rho_0),$$

а ряд

$$4M \sum_1^{\infty} \rho_0^k < \infty \quad (0 < \rho_0 < 1)$$

сходится.

Поэтому сумма ряда (2)  $u(\rho, \theta)$  является решением поставленной задачи (является гармонической функцией).

Тот факт, что решение задачи Дирихле является единственным, мы доказывать не будем.

## § 5.4. Задача Дирихле для полуплоскости

Пусть в полуплоскости  $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$  требуется найти ограниченное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2)$$

Легко проверить, что функции

$$u_\lambda(x, y) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda y)$$

при любом фиксированном  $\lambda > 0$  являются ограниченными гармоническими на  $R_2^+$ , т. е. удовлетворяют на  $R_2^+$  уравнению (1). Но тогда сумма таких функций и даже интеграл по параметру также будет решением уравнения (1):

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} [\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x] \exp(-\lambda y) d\lambda, \quad (3)$$

лишь бы было законно дифференцирование под знаком интеграла по параметрам  $x$  и  $y$ . Функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  найдем из условия (2)

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x] d\lambda = \varphi(x). \quad (4)$$

Запишем разложение функции  $\varphi(x)$  в интеграл Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right) \cos \lambda x + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая формулы (4) и (5), мы видим, что

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi. \quad (6)$$

Подставляя эти функции в (3), получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda y) \cos \lambda(t-x) d\lambda \right] dt. \end{aligned}$$

Согласно § 4.14 пример 4) имеем

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{y^2 dt}{y^2 + (t-x)^2}. \quad (3')$$



**З а м е ч а н и е 1.** Пусть функция  $\varphi(x)$  имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и удовлетворяет условиям

$$\varphi^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0; M_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)| dx < \infty$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Тогда из (6) следуют оценки

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{c}{1 + \lambda^4}, \quad |\beta(\lambda)| \leq \frac{c}{1 + \lambda^4}, \quad (7)$$

где  $c$  — некоторая постоянная. В самом деле, если  $|\lambda| < 1$ , то

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi = M_0 \leq \frac{2M_0}{1 + \lambda^4}. \quad (8)$$

Если же  $|\lambda| \geq 1$ , то, интегрируя по частям четыре раза, получим

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \varphi(\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) \sin \xi \lambda d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) \sin \xi \lambda d\xi = \dots = \frac{1}{\pi \lambda^4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \end{aligned}$$

откуда

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{M_4}{\lambda^4} \leq \frac{2M_4}{1 + \lambda^4}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует первое неравенство (7). Второе неравенство (7) доказывается аналогично.

Оценки (7) обеспечивают существование, непрерывность

и ограниченность функций  $u$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  в верхней полуплоскости  $R_2^+$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Можно доказать, что если функция  $\varphi(x)$  непрерывна и ограничена на  $(-\infty, \infty)$ , то полученное при помощи формулы (3') решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости единственно в классе ограниченных функций.

### § 5.5. Уравнение теплопроводности в стержне

Рассмотрим тонкий изолированный (покрытый тепловой изоляцией) стержень, лежащий на отрезке  $[0, \pi]$  оси  $x$  (рис. 124). Предполагается, что его физические свойства в точках любого его сечения одинаковы. Температура стержня есть функция

$$u = u(x, t)$$

от абсциссы  $x$  сечения и времени  $t$ .

На основании сказанного в § 5.1 функция  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $a^2 > 0$  – константа, если предположить, что теплоемкость и теплопроводность стержня не зависят от  $x$ .

Поставим задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , непрерывную для  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , имеющую непрерывные частные

производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial u}{\partial t}$  для  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1) для  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , и следующим условиям:

1) начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (2)$$

где  $f(x)$  – заданная на отрезке  $[0, \pi]$  непрерывная функция;

2) граничным условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (\forall t \geq 0). \quad (3)$$

Таким образом, предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  температура в стержне выражается функцией  $f(x)$  (см. (2)), а на протяжении всего времени опыта на концах стержня искусственно поддерживается температура нуль (см. (3)).

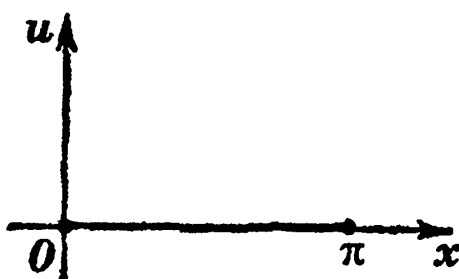


Рис. 124

Уравнение (1) будем решать методом Фурье разделения переменных. Суть его заключается в том, что мы отыскиваем частные решения уравнения (1), удовлетворяющие пока только крайевым условиям (3), в виде

произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного:

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (4)$$

При этом мы ищем нетривиальные решения, т. е. тождественно не равные нулю. Из (4) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 X}{dx^2} = TX'', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем

$$\frac{1}{a^3} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}. \quad (5)$$

В (5) левая часть не зависит от  $x$ , а правая — от  $t$ , поэтому

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu, \quad (6)$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная.

Таким образом, функция  $X(x)$  и  $T(t)$  удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \mu X = 0, \quad (7)$$

$$T' + a^2 \mu T = 0, \quad (8)$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная.

Так как мы ищем решения, удовлетворяющие условиям (3), то при всех  $t$  должны выполняться равенства

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0, \quad u(\pi, t) = X(\pi) T(t) = 0.$$

Если предположить, что  $T(t) = 0, \forall t$ , то  $u(x, t) \equiv 0$  для всех  $x$  и  $t$ . Поэтому имеется хотя бы одно  $t$ , для которого  $T(t) \neq 0$ . Но тогда

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (9)$$

Мы пришли к следующей задаче. Требуется найти такие числа  $\mu$ , для которых дифференциальное уравнение (7) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение на отрезке  $[0, \pi]$ , удовлетворяющее граничным условиям (9).

Задача эта называется *проблемой Штурма–Лиувилля*<sup>1</sup> для уравнения (7) на отрезке  $[0, \pi]$  при граничных условиях (9). Искомые числа  $\mu$  называются *собственными значениями* задачи Штурма–Лиувилля, а соответствующие

<sup>1</sup> Ж. Лиувиль (1809–1882) — французский математик, Ж. Ш. Ф. Штурм (1803–1855) — французский математик.

нетривиальные функции, удовлетворяющие граничным условиям (9), называются *собственными функциями*, соответствующими этим значениям.

Будем искать решение поставленной задачи среди положительных чисел  $\mu = \lambda^2 > 0$  ( $\lambda > 0$ ). В этом случае числа  $\pm i\lambda$  являются корнями характеристического уравнения, поэтому общее решение уравнения (7) запишется так:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из (9) находим

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1, \\ 0 &= C_1 \cos \lambda \pi + C_2 \sin \lambda \pi, \end{aligned} \right\} \text{или} \quad \left. \begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 \sin \lambda \pi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы получить решение, тождественно не равное нулю, нужно считать  $C_2 \neq 0$  и  $\sin \lambda \pi = 0$ . Последнее возможно только при натуральных  $\lambda = k = 1, 2, 3, \dots$ . Каждому  $k$  соответствует решение

$$X_k(x) = d_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

удовлетворяющее, очевидно, граничным условиям (9). Это нетривиальное (тождественно не равное нулю) решение уравнения (7). Итак, числа

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

суть *собственные значения* поставленной выше краевой задачи (проблемы Штурма–Лиувилля), а функции

$$X_k = d_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

при любом  $d_k \neq 0$  – соответствующие этим значениям *собственные функции*.

Мы нашли все собственные значения и собственные функции поставленной задачи Штурма–Лиувилля, потому что при любом  $\mu \leq 0$  дифференциальное уравнение (7) имеет только тривиальное (тождественно равное нулю) решение, удовлетворяющее условиям  $X(0) = X(\pi) = 0$ .

В самом деле, при  $\mu = -\lambda^2 < 0$  общее решение уравнения (7) имеет вид  $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ . Найдем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из условия (9):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 e^{\lambda \pi} + C_2 e^{-\lambda \pi}. \end{aligned} \right\}$$

Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda \pi} & e^{-\lambda \pi} \end{vmatrix} = e^{-\lambda \pi} - e^{\lambda \pi} \neq 0,$$

поэтому система имеет только тривиальное решение  $C_1 = C_2 = 0$ . Таким образом, частного решения уравнения (7), тождественно не равного нулю и удовлетворяющего условиям (9), не существует при  $\mu = -\lambda^2 < 0$ .

Если  $\mu = 0$ , то характеристическое уравнение имеет число нуль кратным корнем, поэтому общее решение (7) запишется

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Учитывая краевые условия, получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_1 + C_2 \pi = 0$ , откуда  $C_1 = C_2 = 0$  и  $X(x) \equiv 0$ .

Остается решить уравнение (8) при найденных  $\mu_k = k^2$ :

$$T' + a^2 k^2 T = 0, \quad \frac{dT}{T} = -a^2 k^2 dt, \quad T(t) = A_k \exp(-a^2 k^2 t),$$

где  $A_k$  — произвольная постоянная.

Итак,

$$u_k(x, t) = b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx \quad (b_k = A_k d_k) \quad (10)$$

— суть частные решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (3).

Легко видеть, что конечная сумма

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx,$$

где  $b_k$  — произвольные постоянные, в свою очередь представляют собой решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям  $u_N(0, t) = u_N(\pi, t) = 0$ . Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx \quad (11)$$

при достаточно малых коэффициентах  $b_k$  будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .

Теперь мы подбираем числа  $b_k$  так, чтобы выполнялось равенство

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (0 \leq x \leq \pi). \quad (12)$$

Числа  $b_k$  подбираются единственным образом — именно по формуле

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt,$$

т. е. они должны быть коэффициентами Фурье функции  $f$  (см. § 4.3).

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ , то ряд (12) сходится к ней в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$  (см. теорему 2 § 4.10).

Если окажется, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$$

сходится, то вследствие неравенств

$$|b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx| \leq |b_k|, \quad (13)$$

ряд (11) равномерно сходится и его сумма есть непрерывная функция для  $t \geq 0$ .

При  $t > 0$  ряд (11) сходится очень быстро – его можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. В частности,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

откуда видно, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Законность равенств (14), т. е. почленной дифференцируемости ряда (11) при  $t > 0$ , может быть прослежена следующим образом. Если задано  $t > 0$ , то возьмем  $t_0$  так, чтобы  $0 < t_0 < t$ . Тогда, например, в случае первого ряда (14), считая, что  $|b_k| \leq M$ , будем иметь

$$|k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx| \leq M k^2 \exp(-a^2 k^2 t_0).$$

Но ряд из положительных (постоянных!) чисел

$$M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-a^2 k^2 t_0) < \infty$$

сходится (что можно проверить по признаку Даламбера или Коши), а это вместе с оценкой (13) показывает, что почленное дифференцирование два раза по  $x$  произведено законно.

**З а м е ч а н и е.** Выше мы получили, что задача Штурма–Лиувилля

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad (15)$$

имеет собственные значения

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 4, \mu_3 = 9, \dots, \mu_k = k^2, \dots \quad (16)$$

Они положительны и им соответствуют собственные функции

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin kx, \dots, \quad (17)$$

образующие ортогональную систему на отрезке  $[0, \pi]$ :

$$\int_0^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = 0 \quad (k \neq l).$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что система (17) полна в  $L'_2(0, \pi)$  (см. теорему 2 § 4.10), т. е. ряд Фурье произвольной кусочно-непрерывной на отрезке  $[0, \pi]$  функции по этой системе сходится к ней в смысле среднего квадратического.

Некоторые сведения, обобщающие эти факты, читатель может найти далее в § 5.10.

## § 5.6. Теплопроводность для бесконечного стержня

Согласно § 5.5 температура  $u(x, t)$  точки  $x$  стержня в момент времени  $t$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Будем рассматривать бесконечный стержень  $(-\infty < x < \infty)$ . Краевые условия при этом отпадают, поэтому мы будем искать ограниченное решение уравнения (1), удовлетворяющее только начальному условию

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где функция  $\varphi(x)$  определена на всей действительной оси. Будем предполагать, что функция  $\varphi$  непрерывна и принадлежит  $L'(-\infty, \infty)$ . Эту задачу мы будем называть *задачей Коши* для уравнения (1).

Для упрощения записи ниже будем считать  $a = 1$ .

Чтобы решить поставленную задачу, применим метод Фурье разделения переменных. Частное решение будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставляя эту функцию в (1), получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \mu,$$

$$T' = \mu T, \quad (3)$$

$$X'' = \mu X. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$T(t) = C \exp(\mu t).$$

Из физических соображений ясно, что температура  $u(x, t) = X(x)T(t)$  не может возрастать неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ . Значит, постоянная  $\mu$  должна быть отрицательной. Положим  $\mu = -\lambda^2$ . Тогда решение уравнения (4)

$$X(x) = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x.$$

Функция

$$u_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 t) \quad (5)$$

есть частное решение уравнения (1) при всех  $\lambda$ . Но тогда сумма таких решений и даже интеграл по параметру  $\lambda$  от функции (5) также будет решением уравнения (1):

$$u(x, t) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda. \quad (6)$$

Конечно, функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  должны достаточно быстро убывать к нулю, чтобы законно было дифференцирование (6) по параметрам  $x$  и  $t$ . Функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  находим из начального условия

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = \varphi(x). \quad (7)$$

Запишем разложение функции  $\varphi$  в интеграл Фурье (см. (1) § 4.13):

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right) \cos \lambda x + \right.$$



$$+ \left. \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), мы видим, что надо считать

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi. \quad (9)$$

Подставляя эти значения в (6), получаем (см. 12) § 4.14)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi \right] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2 t) \cos \lambda \xi d\lambda \right] d\xi = \left( \lambda = \frac{z}{\sqrt{t}} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \cos \frac{\xi z}{\sqrt{t}} \frac{dz}{\sqrt{t}} \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi + x) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, задача (1), (2) решена полностью.

**З а м е ч а н и е.** Если функция  $\varphi$  удовлетворяет условиям, отмеченным в замечании 1 § 5.4, то решение задачи Коши, полученное по формуле (10), непрерывно и ограни-

чено вместе со своими производными  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и является единственным решением в классе ограниченных функций.

## § 5.7. Малые колебания струны

*Струной* называется тонкая нить, работающая на растяжение, но не на изгиб. Если ненатянутую струну мять, она не сопротивляется, однако если ее растягивать, то в

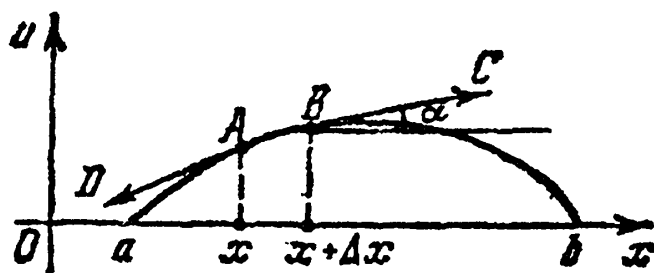


Рис. 125

ней возникают напряжения.

Пусть концы куска натянутой струны закреплены в точках  $x = a$ ,  $x = b$  оси  $x$ . Будем считать, что величина возникающего в ней напряжения равна числу  $T$ . Плотность струны будем считать равной числу  $\rho$  на всем

ее протяжении. В момент времени  $t = 0$  выведем нашу струну из равновесия, например оттянем пальцем и предоставим ей свободно колебаться (дрожать) – совершать малые колебания.

Отклонение струны в любой ее точке, имеющей абсциссу  $x$ , в момент времени  $t$  обозначим через

$$u = u(x, t) \quad (a \leq x \leq b, t \geq 0).$$

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $u$ .

На рис. 125 изображен график нашей струны в момент времени  $t$ .

На элемент ее, соответствующий отрезку  $[x, x + \Delta x]$ ,

действуют две силы натяжения  $\vec{BC}$  и  $\vec{AD}$ . Скалярная величина каждой из этих сил равна  $T$ :

$$|\vec{BC}| = |\vec{AD}| = T.$$

Сила  $\vec{BC}$  приложена к точке  $B$ , имеющей абсциссу  $x + \Delta x$ , направлена по касательной к струне в этой точке и образует с положительным направлением оси  $x$  угол  $\alpha$ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Так как струна совершает малые колебания, то можно считать приближенно

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha \approx \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Проекция силы  $\vec{BC}$  на ось  $u$ , очевидно, равна

$$T \sin \alpha \approx T \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Проекция же силы  $\overrightarrow{AD}$  на ось  $u$ , очевидно, равна

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Сумма этих проекций равна

$$T \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Мы пренебрегаем бесконечно малыми более высокого порядка, чем  $\alpha$ , потому что рассматриваем, как говорят, малые колебания струны.

С другой стороны, произведение массы на ускорение рассматриваемого элемента струны равно

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Поэтому на основании закона Ньютона

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

Сокращая на  $\Delta x$ , получим дифференциальное уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( a^2 = \frac{T}{\rho} \right). \quad (1)$$

Теперь математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, можно сформулировать так: требуется решить линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка (1) при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad (2)$$

и при краевых условиях

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия (2) показывают, в каком положении находилась струна в начальный момент времени и какова скорость каждой ее точки при  $t = 0$ . Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  – заданные функции.

Краевые условия (3) показывают, что концы струны закреплены в точках  $a = 0$  и  $b = \pi$ .

Решение поставленной задачи можно провести методом Фурье (так же как в § 5.5). Ищем сначала решение уравнения (1) в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (4)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} X(0) T(t) &= 0, \\ X(\pi) T(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

для всех  $t > 0$ . Но тогда

$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

потому что иначе было бы  $T(t) \equiv 0$  и  $u(x, t) \equiv 0$ .

Подставляя произведение (4) в (1), получим

$$XT'' = a^2 X''T,$$

или

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Но функция от  $t$  может равняться функции от  $x$ , только если обе они равны постоянному числу, которое мы обозначим через  $-\mu$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu.$$

В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (6)$$

$$T'' + a^2 \mu T = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) надо решить с краевыми условиями  $X(0) = X(\pi) = 0$ , т. е. надо решить для этого уравнения проблему Штурма–Лиувилля (см. § 5.5). Как показано в § 5.5, решением этой проблемы являются числа (собственные значения)

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и соответствующие им нетривиальные функции (собственные функции)

$$X_k(x) = \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

удовлетворяющие при этих числах условиям (5).

Общее решение уравнения (7) при найденных  $\mu_k = k^2$  имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, все решения дифференциального уравнения (1) вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (5), можно записать в виде

$$u_k(x, t) = (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где постоянные  $A_k$ ,  $B_k$  для каждого  $k$  могут быть взяты произвольно. Но тогда и любые суммы

$$\sum_{k=1}^N (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx$$

суть решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (5). Вместе с этими суммами обладают этим свойством и суммы бесконечных рядов

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx, \quad (8)$$

если числа  $A_k$  и  $B_k$  достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Теперь в нашем распоряжении имеется большой запас функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих уравнению (1) и граничным условиям (3), — они определяются формулой (8), где числа  $A_k$ ,  $B_k$  — произвольные, лишь бы выполнялись указанные условия сходимости.

Чтобы найти решение поставленной задачи, удовлетворяющее начальным условиям (2), дифференцируем (8) по  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} ak (-A_k \sin akt + B_k \cos akt) \sin kx \quad (9)$$

и приравниваем (8) и (9) при  $t = 0$  заданным функциям  $f(x)$  и  $F(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ak B_k \sin kx. \quad (10)$$

Отсюда

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad B_k = \frac{2}{\pi ak} \int_0^{\pi} F(t) \sin ktdt. \quad (11)$$

Если функции  $f(x)$  и  $F(x)$  непрерывные на  $[0, \pi]$ , то этого достаточно, чтобы можно было вычислить числа  $A_k$ ,  $B_k$  по формулам (11) и ряды (10) будут сходиться к этим функциям во всяком случае в смысле среднего квадратического (см. § 4.10). Конечно, если функции  $f(x)$  и  $F(x)$  не только непрерывны, но и имеют непрерывные производные (достаточно третьего порядка), то сумма ряда (8) уже заведомо будет иметь вторые непрерывные производные.

## § 5.8. Колебание бесконечной струны.

### Формула Даламбера

Если струна очень длинная, то на колебания, возникающие где-то в ее середине, концы струны будут оказывать малое влияние.

Поэтому, рассматривая свободные колебания неограниченной струны, мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

только при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

$$u'_t(x, 0) = F(x). \quad (3)$$

Такая задача называется *задачей Коши* или *задачей с начальными условиями*.

Эту задачу удобно решить следующим образом. Введем новые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (4)$$

тогда уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5), очевидно, является функция

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные функции, которые мы будем считать дважды дифференцируемыми.

Возвращаясь к старым переменным, получаем решение уравнения (1) в форме

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (6)$$

Непосредственным дифференцированием (6) легко убедиться, что это действительно так. Имеем

$$u'_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at),$$

$$u'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$u''_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at),$$

т. е.

$$a^2 u''_{xx} = u''_{tt}.$$

Полученное решение (6), зависящее от двух произвольных функций, называется *решением Даламбера*<sup>1</sup>.

Используя начальные условия, найдем функции  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad (7)$$

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \quad (8)$$

Интегрируя (8) на отрезке  $[0, x]$ , получим

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(y) dy + C, \quad (9)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Из (7) и (9) находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy - \frac{C}{2}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy + \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь решение задачи Коши запишется

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x - at) + \psi(x + at) = \\ &= \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(y) dy + \frac{1}{2} f(x + at) + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(y) dy, \end{aligned}$$

или

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy. \quad (11)$$

Формула (11) называется *формулой Даламбера*.

## § 5.9. Колебание круглой мембраны

Пусть круглая мембрана радиуса 1 в состоянии покоя занимает круг радиуса 1 с центром в начале полярной

<sup>1</sup> Ж. Даламбер (1717–1783) – выдающийся французский математик.

системы координат  $r, \varphi$  (рис. 126). Будем считать, что мембрана закреплена по окружности  $r = 1$ . Если теперь подействовать на мембрану некоторой силой, то отклонение точек мембраны  $u$  будет функцией координат  $r, \varphi$  и времени  $t$ :

$$u = u(r, \varphi, t).$$

Так же как и в § 5.7, можно получить уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad (1)$$

Для уравнения (1) мы будем решать задачу с краевым условием

$$u|_{r=1} = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r). \quad (3)$$

Мы рассматриваем, таким образом, осесимметрическое колебание мембраны, при котором все точки окружности радиуса  $r \leq 1$  с центром в начале координат в начальный момент времени имеют скорости и отклонения, не зависящие от угла  $\varphi$ . Таким образом, и функция  $u$  будет зависеть только от  $r$  и  $t$  и уравнение (1) упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) с условиями (2), (3) можно найти методом Фурье. Ищем сначала все решения вида

$$u(r, t) = U(r)T(t).$$

Легко показать (как в § 5.7), что функции  $T(t)$  и  $U(r)$  удовлетворяют уравнениям

$$T'' + \mu^2 a^2 T = 0, \quad (5)$$

$$U'' + \frac{1}{r} U' + \mu^2 U = 0. \quad (6)$$

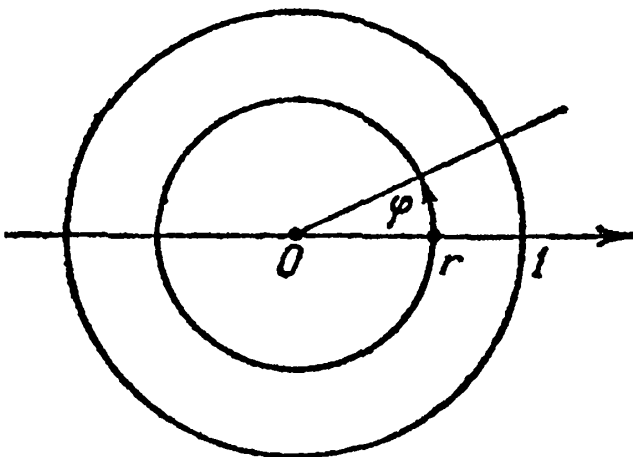


Рис. 126



Таким образом, надо найти числа  $\mu$ , для которых уравнение (6) имеет нетривиальное решение  $U(r)$ , удовлетворяющее граничному условию

$$U(1) = 0. \quad (7)$$

Эти числа  $\mu$  называются *собственными значениями* данной задачи Штурма–Лиувилля, а функции  $U(r)$  – им принадлежащими *собственными функциями*.

**З а м е ч а н и е.** В § 5.7 рассматривалась задача Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными условиями ( $X(0) = X(\pi) = 0$ ). В данной же задаче, тоже для уравнения второго порядка, фигурирует только одно граничное условие ( $U(1) = 0$ ). Это происходит потому, что данное уравнение имеет особенность в точке  $r = 0$ , вследствие которой это уравнение имеет наряду с ограниченными и неограниченными решениями. Фактически и в данном случае ищутся собственные функции, удовлетворяющие двум граничным условиям: первое условие – собственная функция  $U(r)$  должна быть ограничена в окрестности  $r = 0$  и второе условие –  $U(1) = 0$ .

Чтобы получить решение уравнения (6), введем новую переменную

$$\rho = r\mu, \quad V(\rho) = U(\rho/\mu).$$

Тогда уравнение (6) превращается в такое же уравнение, но при  $\mu = 1$ :

$$V''(\rho) + \frac{1}{\rho} V'(\rho) + V(\rho) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) уже изучалось в §1.24, пример 2. Оно имеет два линейно независимых решения, одно из них неограничено в окрестности точки  $\rho = 0$ , а другое есть функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k} (k!)^2},$$

где степенной ряд справа сходится на интервале  $-\infty < \rho < \infty$ . Всевозможные ограниченные в окрестности нулевой точки решения уравнения (8) имеют вид  $CJ_0(\rho)$ , где  $C$  – произвольная постоянная (см. замечание 1 § 1.24). Соответствующие функции

$$CJ_0(r\mu)$$

и будут нужными нам ограниченными на  $[0, 1]$  решениями уравнения (6).

Теперь остается подобрать  $\mu$  так, чтобы выполнялось граничное условие

$$J_0(1 \cdot \mu) = 0.$$

Мы видим, что число  $\mu$  должно быть корнем функции  $J_0(r)$ . Хорошо известно, что функция  $J_0(r)$  имеет бесконечное число нулей:  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ . Например,

$$\mu_1 = 2,40; \mu_2 = 5,52; \dots$$

Итак, числа  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) суть собственные значения, а  $J_0(\mu_k r)$  им принадлежащие собственные функции нашей краевой задачи. Эти функции можно умножать на произвольные постоянные  $c_k \neq 0$  и получать снова собственные функции

$$c_k J_0(\mu_k r) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

принадлежащие числам  $\mu_k$ .

При  $\mu = \mu_k$  решение уравнения (5) запишется

$$T_k(t) = a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at.$$

Соответствующие решения уравнения в частных производных (4), удовлетворяющие граничному условию (2), имеют вид

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r),$$

где  $a_k, b_k$  — произвольные постоянные. Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r) \quad (9)$$

является решением уравнения (4), удовлетворяющим граничному условию (2), конечно, если числа  $a_k$  и  $b_k$  достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Чтобы найти решение поставленной задачи, коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  находим из начальных условий (3):

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = f(r), \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a \mu_k b_k J_0(\mu_k r) = F(r). \quad (11)$$

Функции Бесселя  $J_0(\mu_k r)$  обладают свойствами, сходными со свойствами тригонометрических функций. Так,

если функция  $f(r)$  кусочно-гладкая на  $[0, 1]$ , то она непрерывно разлагается в ряд вида (10) (с постоянными коэффициентами  $a_k$ ), сходящийся к ней, во всяком случае, в смысле среднего квадратического (см. также § 5.10).

Мы знаем, что тригонометрические функции ортогональны на  $[0, 2\pi]$ . Функции Бесселя  $J_0(\mu_k x)$  тоже ортогональны на  $[0, 1]$ , но, как говорят, с весом  $x$ :

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_l x) dx = 0 \quad (k \neq l). \quad (12)$$

Отсюда следует, как мы это докажем ниже, что в равенствах (10), (11) числа  $a_k$ ,  $b_k$  необходимо вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) f(x) dx}{\int_0^1 x [J_0(\mu_k x)]^2 dx}, \quad a \mu_k b_k = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) F(x) dx}{\int_0^1 x [J_0(\mu_k x)]^2 dx} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Система непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \quad (14)$$

называется *ортогональной на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x) \geq 0$* , где  $\rho(x)$  непрерывная функция, если выполняются равенства

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l). \quad (15)$$

Если функция  $f(x)$  разложена в равномерно сходящийся на  $[a, b]$  ряд по функциям  $\varphi_k(x)$  системы (14):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (16)$$

то

$$c_m = \frac{\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) f(x) dx}{\int_a^b \rho(x) [\varphi_m(x)]^2 dx} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

В самом деле, после умножения ряда на  $\rho(x)\varphi_m(x)$  его равномерная сходимость не нарушается и почленное интегрирование по  $[a, b]$  в силу свойств (15) приводит к равенству

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) f(x) dx = c_m \int_a^b \rho(x) [\varphi_m(x)]^2 dx \quad (m = 1, 2, \dots),$$

откуда и получаем формулы (17).

Докажем (12). Функция  $J_0(\mu_k x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) + \mu_k^2 J_0(\mu_k x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Умножая уравнение со значком  $k$  на  $xJ_0(\mu_n x)$ , а уравнение с индексом  $n$  на  $xJ_0(\mu_k x)$  и вычитая из одного другое, получим

$$\begin{aligned} & x \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_n x) \right] + \\ & + \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right] + \\ & + (\mu_k^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что это уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ x \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right] \right\} + \\ & + (\mu_k^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от 0 до 1, получим

$$(\mu_k^2 - \mu_n^2) \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0 \quad (k \neq n),$$

так как интеграл от первого слагаемого равен нулю в силу того, что  $J_0(\mu_k) = J_0(\mu_n) = 0$ .

## § 5.10. Общая задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] y(x) = 0, \quad (1)$$

где  $p(x)$  – непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[0, l]$  функция, а  $\rho(x)$  и  $q(x)$  – непрерывные на этом отрезке функции. При этом  $p(x) > 0$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  на  $[0, l]$  и  $\lambda$  – постоянное число.

Поставим задачу (Штурма–Лиувилля). Требуется найти все числа  $\lambda$  (*собственные значения*), для которых существует нетривиальное дважды непрерывно дифференцируемое решение  $y(x)$  уравнения (1) (собственная функция), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) &= 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – постоянные числа.

Можно доказать, что:

1) Существует счетное множество собственных значений задачи

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots (\lambda_n \rightarrow \infty),$$

которым соответствуют собственные функции

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

2) При  $q(x) \geq 0$  все собственные значения  $\lambda_n$  положительны.

3) Собственные функции на отрезке  $[0, l]$  образуют ортогональную и нормированную систему с весом  $\rho(x)$ :

$$\int_0^1 \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

4) Теорема Стеклова. Всякая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая крайевым условиям (2) и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям  $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \int_0^1 \rho(x) y_n(x) f(x) dx.$$

**Задача 1.** Решить уравнение свободных колебаний струны при наличии сопротивления среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

При решении предполагать, что коэффициент трения  $m$  мал ( $m < a$ ).

*Ответ.*

$$u(x, t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \sin kx,$$

где

$$q_k = \sqrt{(ka)^2 - m^2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi q_k} \int_0^{\pi} F(x) \sin kx dx + \frac{ma_k}{q_k}.$$

**Задача 2.** Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

*Ответ.*

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x,$$

где

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2}, \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_k x dx - \frac{2u_0}{\pi \lambda_k}.$$

**Указание.** Решение искать в виде  $u = u_0 + v(x, t)$ , где  $v(x, t)$  — неизвестная функция.

**Задача 3.** Доказать свойство 3) ортогональности собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1) на  $[0, t]$ , удовлетворяющих граничным условиям (2).

**Указание.** Необходимо следовать схеме доказательства ортогональности функций Бесселя (см. § 5.9).

**Задача 4.** Привести уравнение (Чебышёва)

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad (3)$$

к виду (1) на  $[-1, 1]$ .

**Указание.** Умножить левую и правую части уравнения (3) на  $\rho(x) > 0$  и найти функцию  $\rho(x)$  из условия

$$-x\rho(x) = [(1 - x^2)\rho(x)]'. \quad (\rho(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}).$$

**Задача 5.** Найти весовую функцию  $\rho(x)$  для уравнения (Чебышёва–Лагерра)

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

**Ответ.**  $\rho(x) = \exp(-x)$ ,  $0 \leq x \leq \infty$ .

### § 5.11. Интеграл энергии (Дирихле)

В пространстве  $x, y, z$  пусть задан достаточно гладкий замкнутый контур  $\Gamma'$ , определенный в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \quad (0 \leq s \leq l). \quad (1)$$

Проекцию  $\Gamma'$  на плоскость  $(x, y)$

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \quad (2)$$

обозначим через  $\Gamma$ . Будем считать, что  $\Gamma'$  проектируется на плоскость  $x, y$  взаимно однозначно, т. е. контур  $\Gamma$  само-непересекается и ограничивает некоторую область  $\Omega$  плоскости  $x, y$  (рис. 127).

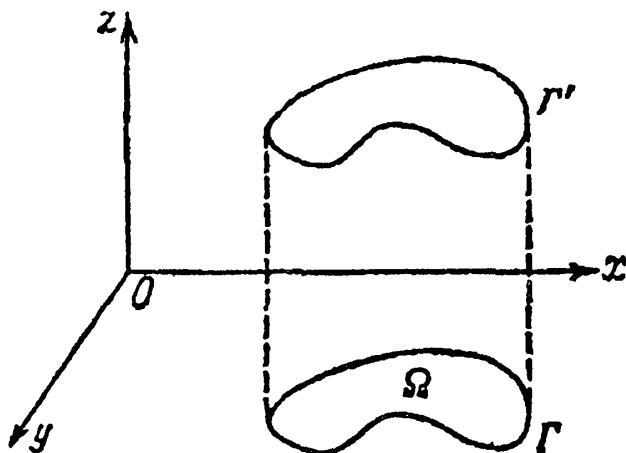


Рис. 127

Пусть на  $\Gamma'$  натянута мембрана, т. е. пленка, работающая на растяжение, но не на изгиб. Требуется найти ее уравнение

$$z = u(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (3)$$

Край мембраны закреплен на  $\Gamma'$ , поэтому функция  $u(x, y)$  удовлетворяет граничному условию

$$u|_{\Gamma} = \chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s)) \quad (0 \leq s \leq l). \quad (4)$$

Можно доказать, что потенциальная энергия мембраны, с точностью до множителя, характеризующего ее физические свойства, выражается кратным (двойным) интегралом

$$D[u] = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5)$$

который называют *интегралом Дирихле* функции  $u(x, y)$ .

Если при помощи внешних сил мембране придать другую форму

$$z = v(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

оставляя ее закрепленной в  $\Gamma'$ , то ее энергия будет равна

$$D[v] = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5')$$

а сама она будет по-прежнему удовлетворять граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = \chi(s) = v[\varphi(s), \psi(s)] \quad (0 \leq s \leq l). \quad (4')$$

В этом состоянии она будет еще больше напряжена, поэтому  $D[v] \geq D[u]$ .

Следовательно,  $u(x, y)$  можно определить как такую функцию, интеграл Дирихле которой обращается в минимум среди интегралов энергии для всевозможных указанных функций  $v$ :

$$D[u] = \min_{u|_{\Gamma} = \chi(s)} D[v]. \quad (6)$$

Введем класс  $W$  функций  $v(x, y)$ , непрерывных на  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , имеющих непрерывные частные производные на  $\Omega$  и удовлетворяющих граничным условиям таким же, как  $u$ :

$$v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}.$$

Функций  $v$ , принадлежащих классу  $W$ , бесконечное множество. Одна из них есть искомая функция  $u(x, y)$ , обращающая  $D[v]$  в минимум среди всех  $v \in W$ :

$$D[u] = \min_{v \in W} D[v]. \quad (7)$$

Отметим, что если каждой функции  $f$  из некоторого класса функций  $E(f \in E)$  в силу некоторого закона приведено в соответствие число  $F(f)$ , то говорят, что  $F(f)$  есть *функционал*, определенный на классе функций  $E$ .



Интеграл Дирихле  $D[v]$  является примером функционала, определенного на классе функций  $W$ .

Для функционалов, так же как для обычных функций, можно рассматривать теорию экстремумов, называемую *вариационным исчислением*. Приращением или *вариацией аргумента функционала*  $F(f)$  называется разность между двумя функциями из класса  $E$ :

$$\delta f = f_1(x) - f(x).$$

По аналогии с понятием дифференциала функции

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x$$

(где  $\alpha$  — произвольное действительное число) можно ввести понятие *вариации функционала*

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(f(x) + \alpha \delta f)|_{\alpha=0}.$$

Говорят, что функционал  $F(f)$  *достигает минимума (максимума)* на функции  $f_0(x)$ , если  $F(f) \geq F(f_0)$  ( $F(f) \leq F(f_0)$ ). Имеет место утверждение: *если функционал, имеющий вариацию  $\delta F$ , достигает минимума (максимума) на функции  $f = f_0$ , то*

$$\delta F(f_0) = 0.$$

В самом деле, при фиксированных  $f_0(x)$  и  $\delta f$  функционал  $F(f_0(x) + \alpha \delta f) = \varphi(\alpha)$  является функцией только от одного переменного  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$  достигает минимума (максиму-

ма), следовательно,  $\varphi'(0) = 0$  или  $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(f_0(x) + \alpha \delta f)|_{\alpha=0} = 0$ , т. е.

$$\delta F(f_0(x)) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, условие (8) есть необходимое условие экстремума функционала.

Вернемся снова к интегралу Дирихле. Введем еще вспомогательный класс  $\mathfrak{M}_0$  функций  $w$ , непрерывных на  $\bar{\Omega}$ , имеющих непрерывные частные производные на  $\Omega$  и равных нулю на  $\Gamma$ :

$$w|_{\Gamma} = 0.$$

Если функция  $v$  имеет вид

$$v = u + w \quad (w \in \mathfrak{M}_0),$$

то, очевидно, она принадлежит к  $W$ . Обратно, всякую функцию  $v \in W$  можно записать в виде

$$v = u + (v - u) = u + w \quad (w \in \mathfrak{M}_0),$$

потому что

$$w|_{\Gamma} = (v - u)|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} - u|_{\Gamma} = \chi(s) - \chi(s) = 0.$$

Поэтому равенство (7) можно еще записать в виде

$$D[u] = \min_{w|_{\Gamma}=0} D[u + w]. \quad (9)$$

Задача о нахождении минимума (9) называется *вариационной задачей*. Функции  $w \in \mathfrak{M}_0$  называют *вариациями* (вариациями аргумента функционала  $D[v]$ ).

Для функции  $u$  достигается минимум интеграла Дирихле в классе  $W$ : прибавление к  $u$  произвольной вариации  $w$  выводит интеграл Дирихле из минимума — он становится бóльшим.

Зададим произвольную функцию  $w \in \mathfrak{M}_0$ . Если помножить ее на какое-либо число  $\lambda$ , то получим снова функцию  $\lambda w \in \mathfrak{M}_0$ , поэтому  $D[u + \lambda w] \geq D[u]$ ,  $\forall \lambda$ . Но

$$\begin{aligned} D[u + \lambda w] &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial(u + \lambda w)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(u + \lambda w)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ &+ 2\lambda \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ &+ \lambda^2 \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= D[u] + 2\lambda D[u, w] + \lambda^2 D[w], \end{aligned} \quad (10)$$

где мы ввели обозначение

$$D[u, w] = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как  $u + \lambda w \in W$ , то имеет место неравенство  $D[u + \lambda w] \geq D[u]$  для любых  $\lambda$ , которое обращается в равенство при  $\lambda = 0$ . Поэтому функция  $D[u + \lambda w]$  от  $\lambda$  обращается в минимум при  $\lambda = 0$ .

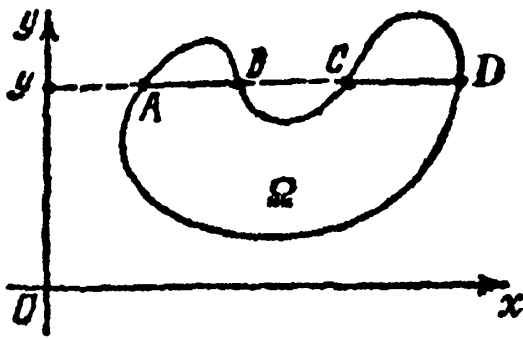


Рис. 128

Но тогда (см. (10); см. также (8))

$$\frac{d}{d\lambda} D[u + \lambda w]_{\lambda=0} = \{2D[u, w] + 2\lambda D[w]\}_{\lambda=0} = 2D[u, w] = 0,$$

и мы доказали, что искомая функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$D[u, w] = 0$$

или уравнению

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (11)$$

для всех  $w \in \mathfrak{M}_0$ . Уравнение (11) называют *уравнением в вариациях*.

Чтобы вычислить интеграл

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy,$$

сперва произведем интегрирование по  $x$  при фиксированном  $y$ . Интегрируя по частям, имеем (рис. 128)

$$\int_{\sigma_y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x} w \Big|_A^B + \frac{\partial u}{\partial x} w \Big|_C^D - \int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx = - \int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx,$$

где  $\sigma_y$  есть сечение  $\Omega$  прямой, состоящей из точек, имеющих ординату  $y$ . На рис. 128  $\sigma_y$  состоит из двух отрезков  $[A, B]$  и  $[C, D]$ . Надо учесть, что функция  $w$  равна нулю в точках  $A, B, C, D$ , лежащих на  $\Gamma$ . Следовательно,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx dy.$$

Аналогично, интегрируя сначала по  $y$ , а затем по  $x$  получим

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} w dx dy.$$

В таком случае из (11) следует, что

$$\iint_{\Omega} w \Delta u dx dy = 0 \quad (12)$$

для всех  $w \in \mathfrak{M}_0$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Но тогда

$$\Delta u = 0 \quad (\forall (x, y) \in \Omega).$$

В самом деле, если допустить, что  $\Delta u \neq 0$  хотя бы в одной точке  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , то в силу непрерывности функции  $\Delta u$  существует круговая окрестность  $U(\delta)$  точки  $(x_0, y_0)$  радиуса  $\delta$ , где функция  $\Delta u$  сохраняет знак числа  $\Delta u(x_0, y_0)$ , которое мы будем считать положительным. Тогда, взяв в качестве функции  $w \in \mathfrak{M}_0$  функцию

$$w(x, y) = \begin{cases} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \delta^2]^2, & (x, y) \in U(\delta), \\ 0, & (x, y) \in \Omega \setminus U(\delta), \end{cases}$$

получаем, что

$$\iint_{\Omega} w \Delta u dx dy = \iint_{U(\delta)} w \Delta u dx dy > 0,$$

что противоречит (12).

Итак, мы доказали, что функция  $z = u(x, y)$ , описывающая мембрану, удовлетворяет на  $\Omega$  уравнению Лапласа, т. е.  $u$  — гармоническая функция на  $\Omega$ . Вопрос о нахождении  $u(x, y)$  свелся к задаче Дирихле: требуется найти гармоническую на  $\Omega$  функцию  $u(x, y)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega}$  и удовлетворяющую граничному условию (4).

**Примечание.** Мы считаем само собой разумеющимся тот факт, что функция  $u$  имеет на  $\bar{\Omega}$  непрерывные производные второго порядка, чтобы было законно производить вычисления, приведенные выше.

На самом деле, это имеет место во всяком случае, если функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  имеют непрерывные производные по параметру  $s$ .

## § 5.12. Применение преобразований Фурье

Ниже даются примеры приложения преобразований Фурье при решении задач математической физики. Но сначала сделаем несколько общих замечаний.

Пусть функция  $f(x)$  имеет на луче  $[0, \infty)$  вторую непрерывную производную и выполняются условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} f''(x) \sin px dx = f'(x) \sin px \Big|_0^{\infty} -$$

$$\begin{aligned}
& - p \int_0^{\infty} f'(x) \cos p x dx = - p \int_0^{\infty} f'(x) \cos p x dx = \\
& = - p f(x) \cos p x \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin p x dx = \\
& = p f(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin p x dx,
\end{aligned}$$

и мы доказали равенство

$$\int_0^{\infty} f''(x) \sin p x dx = p f(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin p x dx. \quad (1)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f''(x) \cos p x dx &= f'(x) \cos p x \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f'(x) \sin p x dx = \\
&= - f'(0) + p \int_0^{\infty} f'(x) \sin p x dx = \\
&= - f'(0) + p f(x) \sin p x \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos p x dx = \\
&= - f'(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos p x dx,
\end{aligned}$$

т. е. имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f''(x) \cos p x dx = -f'(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos p x dx. \quad (2)$$

Конечно, мы предполагаем, что входящие в равенства (1) и (2) несобственные интегралы на  $[0, \infty)$  существуют.

5.12.1. Уравнение теплопроводности. В качестве примера применения синус-преобразования рассмотрим уравнение теплопроводности (см. § 5.5) для полубесконечного стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0) \quad (3)$$

при граничном условии

$$u = u_0 \text{ при } x = 0, t > 0; \quad (4)$$

и начальном условии

$$u = 0 \text{ при } t = 0, x > 0. \quad (5)$$

Считаем, что  $u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Это не противоречит физическим соображениям. Поэтому мы находимся в условиях возможности применения синус-преобразования.

Итак, пусть

$$u_s = u_s(p, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x, t) \sin px dx \quad (6)$$

— синус-преобразование искомого решения поставленной выше задачи.

Умножая уравнение (3) на  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin px$  и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим (учитывая (4)–(6))

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = k^2 \left( p \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 - p^2 u_s \right) \quad (t > 0); \quad (7)$$

$$u_s = 0 \text{ при } t = 0. \quad (8)$$

Таким образом, мы свели задачу к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Ограниченное решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (8), имеет вид

$$u_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p^{-1} u_0 [1 - \exp(-p^2 k^2 t)].$$

Формула обращения (см. (3) § 4.13) дает

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} u_0 \int_0^{\infty} [1 - \exp(-p^2 k^2 t)] \sin px \frac{dp}{p}. \quad (9)$$

Как нам известно (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление»,

§ 6.10), интеграл  $\int_0^{\infty} \sin px \frac{dp}{p}$  сходится и, более того (см. ниже пример 2 § 6.14),

$$\int_0^{\infty} \sin px \frac{dp}{p} = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Поэтому

$$u = u_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) \sin px \frac{dp}{p} \right]. \quad (11)$$

Полезно проверить, что функция (11) действительно удовлетворяет нашему уравнению. При проверке необходимо обосновать законность дифференцирования по параметру соответствующих несобственных интегралов.

При  $t = 0$  интеграл в правой части (11) равен  $\pi/2$ , в силу (10). Поэтому выполняется начальное условие (5).

При  $x = 0$  этот интеграл равен нулю и  $u = u_0$ , т. е. выполняется граничное условие (4).

Интеграл в (11) при  $t > 0$  сходится, потому что

$$\int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) \left| \frac{\sin px}{p} \right| dp \leq \int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) dp < \infty.$$

Продифференцировав формально равенство (11) по переменной  $t$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 kt) \sin px \frac{dp}{p}. \quad (12)$$

Чтобы обосновать законность формального дифференцирования при  $t > 0$ , надо задать произвольный отрезок  $[a, b]$  изменения  $t$ , где  $a > 0$ , и доказать, что интеграл (12) равномерно сходится на этом отрезке при фиксированном  $x \geq 0$  (см. теорему 2 § 2.15).

Так как  $|\sin px| \leq px$ , то при фиксированном  $x \geq 0$  выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 kt) |\sin px| \frac{dp}{p} \leq x \int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 ka) dp,$$

где интеграл в правой части сходящийся и не зависит от  $t$ . Но тогда интеграл (12) равномерно сходится на  $[a, b]$  и формальное дифференцирование (11) законно, и формула (12) действительно имеет место (см. § 2.15, с. 198).

Подобным образом обосновывается законность формального дифференцирования при получении частной

производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Аналогичным образом, используя комплексное преобразование Фурье, можно решить задачу теплопроводности для бесконечного в обе стороны стержня  $-\infty < x < \infty$  (см. § 5.6, где решение задачи получено методом Фурье разделения переменных).

5.12.2. Уравнение колебания неограниченной струны. Как мы установили в § 5.7, уравнение колебания струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0). \quad (13)$$

Будем решать уравнение (13) при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} u &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} (t = 0, -\infty < x < \infty). \quad (14)$$

Мы предполагаем, что функция  $f(x)$  такова, что все выкладки, которые будут производиться ниже, законны.

Пусть

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ipx} dx$$

— комплексное преобразование Фурье (обратное) функции  $u(x, t)$ .

Интегрируя по частям (в предположении, что  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial x}$  обращаются в нуль при  $x = \pm\infty$ ), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -p^2 \hat{u}. \quad (15)$$

Умножая уравнение (13) на  $e^{ipx}$  и используя начальные условия (14), интегрируя по  $x$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,



используя (15), получим вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -a^2 p^2 \hat{u} \quad (t > 0). \quad (16)$$

Начальные условия запишутся

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} = \hat{f}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} (t = 0). \quad (17)$$

Решая уравнение (16) (обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами), получим

$$\hat{u} = \hat{f}(p) \cos apt.$$

Формула обращения (см. (19) § 4.12) дает

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \hat{f}(p) \cos apt \, dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \frac{e^{iapx} + e^{-iapx}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz dp = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-ip(x-at)} + e^{-ip(x+at)}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz dp = \\ &= \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что

$$u = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)],$$

т. е. получили формулу Даламбера для данной задачи (см. (11) § 5.8).

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## § 6.1. Понятие функции комплексного переменного

Понятие комплексного числа было рассмотрено в нашей книге «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», глава 5. Там же были рассмотрены многочлены  $Q_n(z)$  от комплексного переменного. Многочлен является простейшим примером функции комплексного переменного.

Комплексные числа мы условились изображать точками плоскости, где задана прямоугольная система координат.

Дадим понятие *функции от комплексного переменного*.

Пусть даны две плоскости комплексных чисел  $z=x+iy$  и  $w = u + iv$  (рис. 129). Рассмотрим некоторое множество

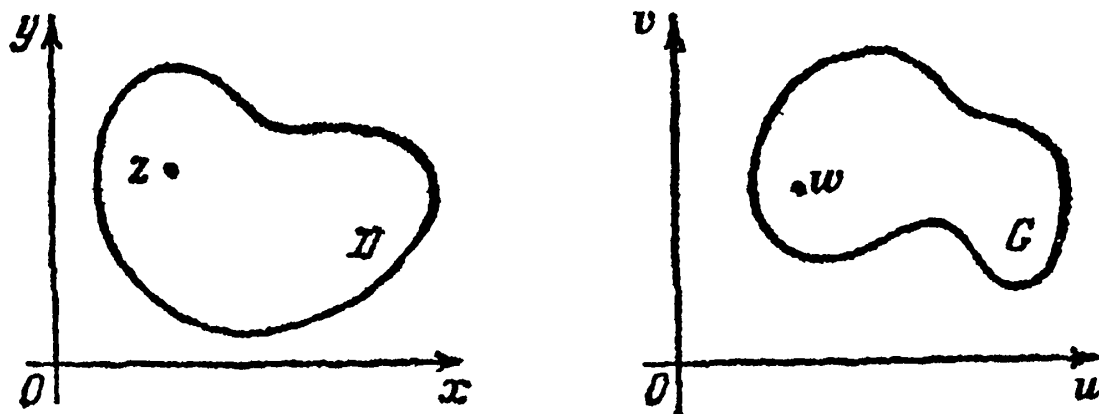


Рис. 129

точек  $D$  в плоскости  $z$  и множество  $G$  в плоскости  $w$ . Если каждому числу  $z \in D$  по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число  $w \in G$ , то говорят, что на множестве  $D$  задана однозначная функция комплексного переменного, отображающая множество  $D$  в множество  $G$ . Символически это обозначают так:

$$w = f(z).$$

Множество  $D$  называют областью определения функции  $f(z)$ . Если каждая точка множества  $G$  является значением функции, то говорят, что  $G$  – область значений этой функции или образ множества  $D$  при помощи функции  $f(G) = f(D)$ . В этом случае говорят еще, что функция  $f$  отображает  $D$  на  $G$ .

Функцию  $f(z)$  можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad ((x, y) \in D),$$

где

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}f(z), \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}f(z) \end{aligned} \quad ((x, y) \in D),$$

– действительные функции от переменных  $x, y$ .

Если каждому  $z \in D$  соответствует несколько разных значений  $w$ , то функция  $w = f(z)$  называется *многозначной*.

Понятия предела и непрерывности функции комплексного переменного вводятся аналогично, как это делается для функции действительного переменного, необходимо лишь всюду вместо абсолютной величины писать модуль комплексного числа.

Говорят, что функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

имеет предел в точке  $z_0$ , равный числу  $A = a + ib$ , если

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z) - A| = 0. \quad (1)$$

В этом случае пишут

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

На языке функций  $u$  и  $v$  свойство (1) записывается в виде равенства

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = 0 \quad (2)$$

или, что все равно, в виде двух равенств<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Определенис предела функции от двух переменных см. в нашей книге «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчис-

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b. \quad (3)$$

Для комплексных функций  $f(z)$  и  $g(z)$  имеют место свойства, аналогичные соответствующим свойствам действительных функций:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как обычно, формулы (4) надо понимать в том смысле, что если пределы, стоящие в их правых частях, существуют, то существуют также пределы, стоящие в их левых частях, и выполняется соответствующее равенство.

Функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  называется *непрерывной* в точке  $z_0$ , если для нее выполняется свойство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0); \quad (f(z + \Delta z) - f(z_0)) \rightarrow 0, \quad \Delta z \rightarrow 0. \quad (5)$$

Таким образом, непрерывная в точке  $z_0$  функция должна быть определена в окрестности этой точки, в том числе и в ней самой и должно выполняться равенство (5). Равенство (5) эквивалентно двум равенствам:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Следовательно, непрерывность  $f$  в точке  $z_0$  эквивалентна непрерывности функций  $u$  и  $v$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Из свойств (4) следует, что сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке  $z_0$  комплексных функций  $f(z)$  и  $g(z)$  есть непрерывная функция в этой точке. В случае частного надо в этой формулировке считать, что  $g(z_0) \neq 0$ .

**Пример 1.** Функция  $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  задана на всей комплексной плоскости. Ее значения — неотрицательные числа. Эта функция непрерывна во всех точках комплексной плоскости:

$$\|z + \Delta z\| - \|z\| \leq |\Delta z| \rightarrow 0 \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Пример 2.

$$w = \operatorname{arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \quad (6)$$

Эта функция многозначная (бесконечнозначная);  $\varphi = \operatorname{arg} z$  — главное значение аргумента ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

Пример 3. Функция  $w = z$ . Она непрерывна:

$$\|z + \Delta z - z\| = |\Delta z| \rightarrow 0 \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Но тогда и функция  $z^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) непрерывна как произведение конечного числа непрерывных функций.

Множество комплексных чисел  $D$  будем называть *областью*, если  $D$ , как множество точек плоскости, открыто и связно.

Область  $D$  называется *односвязной*, если любая непрерывная замкнутая самонепересекающаяся кривая, проведенная в  $D$ , ограничивает некоторую область  $G$ , целиком принадлежащую  $D$ .

Область, не обладающую этим свойством, будем называть *многосвязной*.

Пример 4. Кольцо  $r < |z| < R$  — многосвязная (двусвязная) область. Кривая  $L$  (рис. 130) принадлежит кольцу, но ограничивает область, не входящую целиком в него.

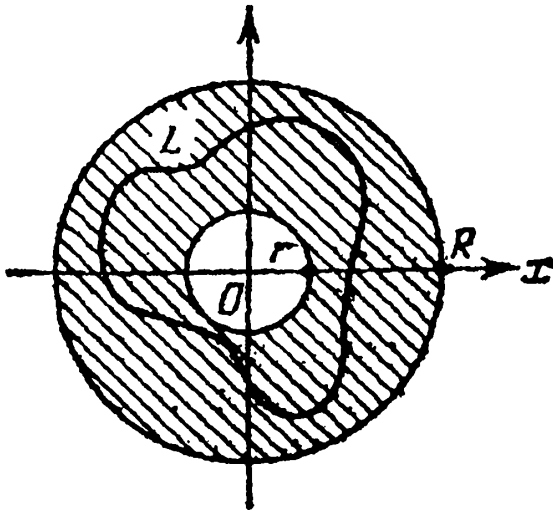


Рис. 130

## § 6.2. Производная функция комплексного переменного

Пусть задана однозначная функция  $w = f(z)$  на области  $D$  (открытом связном множестве) комплексной плоскости  $z$ .

Производной от функции  $f(z)$  в точке  $z$  называется предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz} \quad (1)$$

когда  $\Delta z$  любым образом стремится к нулю.

Далеко не всякая функция комплексного переменного имеет производную. Существование предела (1) — очень

сильное требование: при подходе  $z + \Delta z$  к  $z$  по любому пути каждый раз должен существовать указанный в (1) предел.

Функцию  $f(z)$ , имеющую непрерывную производную в любой точке области  $D$  комплексной плоскости, называют *аналитической функцией на этой области*.

Можно доказать, что если производная аналитической функции  $f(z)$  не равна нулю на области  $D$ , то множество значений  $G$  функции  $f(z)$  также есть область. Мы будем пользоваться этим свойством.

Дадим геометрическое представление производной  $f'(z)$ , когда она не равна нулю. Кроме плоскости  $z$ , введем еще другую плоскость точек  $w$ . Опишем из точки  $z$  открытый круг  $\sigma$  радиуса  $\delta > 0$  с центром в ней (рис. 131).

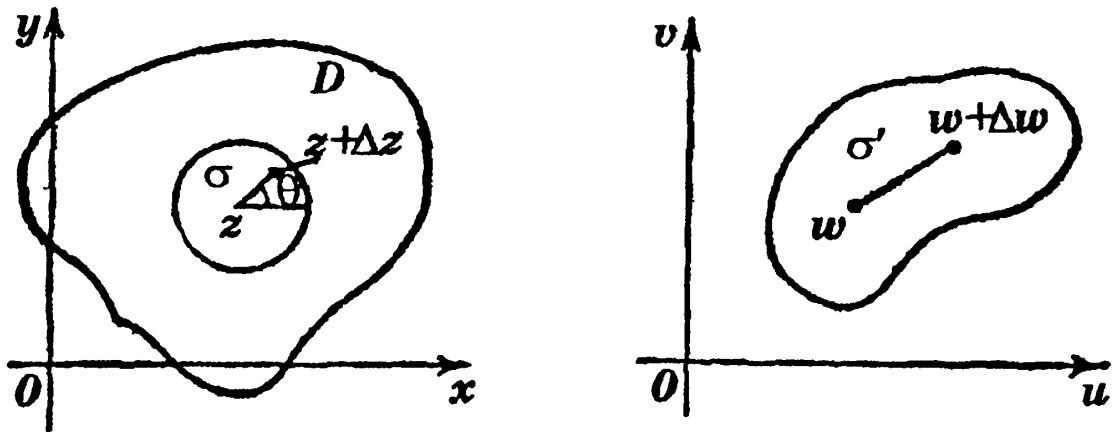


Рис. 131

Произвольная точка  $\sigma$  имеет вид  $z + \Delta z$ , где  $\Delta z$  — произвольное комплексное число с модулем, меньшим  $\delta$ :  $|\Delta z| < \delta$ . Запишем  $\Delta z$  в показательной форме

$$\Delta z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0). \quad (2)$$

При помощи функции  $w = f(z)$  круг  $\sigma$  перейдет в некоторую область  $\sigma'$  плоскости  $w$ . Область  $\sigma'$  состоит из точек  $w + \Delta w$ , где приращения  $\Delta w$  соответствуют всевозможным указанным приращениям  $\Delta z$  ( $|\Delta z| < \delta$ ) (см. рис. 131).

Из (1) следует равенство

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z), \quad \text{где } \alpha(\Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0.$$

Умножая левую и правую части последнего равенства на  $\Delta z$ , получаем

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta z). \quad (3)$$

Произведение  $\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)$  стремится к нулю при  $\Delta z \rightarrow 0$  быстрее чем  $\Delta z$ . Поэтому, если  $f'(z) \neq 0$ , то первый член

правой части (3) является *главным*. Приближенно, с точностью до бесконечно малых высшего порядка (по сравнению с  $\Delta z$ ), при достаточно малых  $\Delta z$  можно написать

$$\Delta w \approx f'(z)\Delta z.$$

Число  $f'(z)$  запишем в показательной форме

$$f'(z) = re^{i\varphi} \quad (r > 0). \quad (4)$$

Поэтому, учитывая (2), получим

$$\Delta w \approx rpe^{i(\varphi+\theta)} \quad (|\Delta z| = \rho < \delta).$$

Мы видим, что модуль  $|\Delta w|$ , с точностью до бесконечно малой высшего порядка, в  $r = |f'(z)|$  раз больше модуля  $|\Delta z|$ :

$$|\Delta w| \approx r\rho = r|\Delta z|,$$

а аргумент  $\Delta w$  (тоже с точностью до бесконечно малой высшего порядка) получается из аргумента  $\Delta z$  прибавлением к нему числа  $\varphi$  (рис. 132):

$$\text{Arg}(\Delta w) \approx \text{Arg}(\Delta z) + \varphi.$$

Таким образом, для того чтобы представить себе, куда перешли точки  $z + \Delta z$  с  $|\Delta z| < \delta$  при помощи функции  $w = f(z)$  надо 1) повернуть круг  $\sigma$  на угол  $\varphi = \arg f'(z)$  и 2) растянуть его в  $r = |f'(z)|$  раз. Каждая точка  $z + \Delta z$ ,  $|\Delta z| < \delta$ , при помощи этих двух операций перейдет в некоторую точку, которую надо еще сдвинуть на величину  $\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)$  — бесконечно малую высшего порядка чем  $\Delta z$ .

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — гладкие кривые, выходящие из точки  $z$ . Касательные к ним образуют с осью  $x$  углы соответственно  $\theta_1, \theta_2$  (отсчитываемые от оси  $x$  против часовой стрелки). Образы этих кривых  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$  на плоскости  $w$  (рис. 133) при помощи функции  $w = f(z)$  имеют касательные в точке  $w$ , образующие с осью абсцисс соответственно углы  $\theta'_1, \theta'_2$  (которые отсчитываются тоже против часовой стрелки).

При этом (в силу свойства 1))

$$\theta'_1 = \theta_1 + \varphi, \quad \theta'_2 = \theta_2 + \varphi,$$

откуда следует свойство

$$\theta'_2 - \theta'_1 = \theta_2 - \theta_1,$$

выражающее, как говорят, что данное отображение сохраняет углы и притом с сохранением направления отсчета (если  $\theta_2 > \theta_1$ , то  $\theta'_2 > \theta'_1$ ).

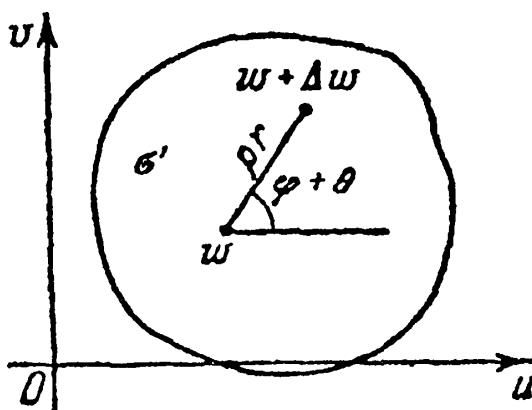


Рис. 132

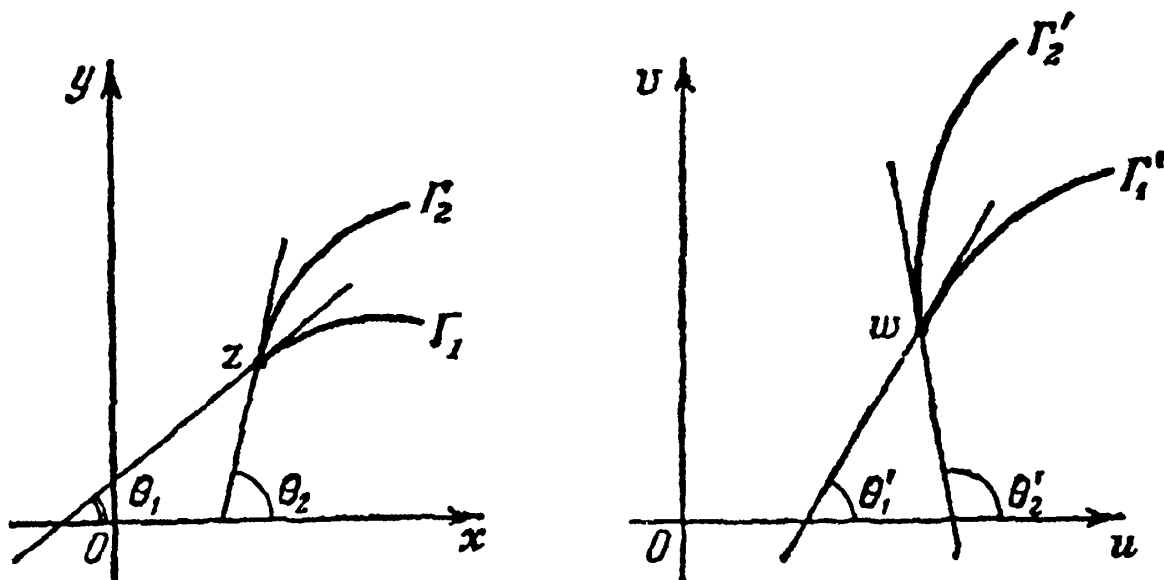


Рис. 133

Кроме того, как мы видели выше, данное отображение осуществляет в каждой точке  $z$ , где  $f'(z) \neq 0$ , растяжение, не зависящее от направления.

Отображение, обладающее (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) свойством сохранения углов (с сохранением направления отсчета) и свойством постоянства растяжений, называется *конформным отображением*.

Из вышеизложенного следует, что *отображение с помощью аналитической функции  $w = f(z)$  является конформным во всех точках, где  $f'(z) \neq 0$ .*

**Замечание 1.** Если функция  $f(z)$  комплексной переменной  $z$  имеет всюду на области  $D$  производную  $f'(z)$ , то автоматически эта производная непрерывна всюду на  $D$ , т. е.  $f(z)$  аналитическая на  $D$ . Этим утверждением мы будем пользоваться, хотя доказывать его не будем.

**Замечание 2.** Из равенства (3) следует, что если функция  $f(z)$  имеет производную в точке  $z$ , то она непрерывна в этой точке (т. е.  $\Delta w \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ ).

Производная от функции  $f(z)$  порядка  $k$  обозначается через  $f^{(k)}(z)$  и определяется по индукции

$$(f^{(k-1)}(z))' = f^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots; f^{(0)}(z) = f(z)).$$

Зная, что у аналитической на области  $D$  функции  $f(z)$  производная непрерывна на  $D$ , нам будет в дальнейшем нетрудно заключить, что  $f(z)$  имеет на  $D$  непрерывные производные любого порядка

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots$$

Употребляют еще такую терминологию: функция  $f(z)$  называется *аналитической в точке  $z_0$* , если она аналити-



ческая на некоторой окрестности этой точки. Наконец, говорят, что функция  $f(z)$  аналитическая на замыкании  $\bar{D}$  области  $D$ , если существует область  $G$ , содержащая в себе  $\bar{D}$  ( $G \supset \bar{D}$ ), на которой  $f(z)$  аналитическая.

Приведем основные свойства производных функций комплексного переменного, аналогичные соответствующим свойствам производных для функций действительного переменного, которые и доказываются аналогично:

$$[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \quad (5)$$

$$[u(z)v(z)]' = u(z)v'(z) + u'(z)v(z), \quad (6)$$

$$\left[ \frac{u(z)}{v(z)} \right]' = \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0), \quad (7)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dv} \frac{dv}{dz}. \quad (8)$$

Формулу (8) надо понимать так: если  $w$  есть функция  $w = \varphi(v)$  комплексного переменного  $v$ , имеющая производ-

ную  $\frac{dw}{dv} = \varphi'(v)$ , а  $v = \psi(z)$  — функция от комплексной

переменной  $z$ , имеющая производную  $\frac{dv}{dz} = \psi'(z)$ , то производная сложной функции

$$w = F(z) = \varphi[\psi(z)]$$

вычисляется по формуле (8).

Ниже мы приводим некоторые элементарные функции комплексного переменного.

### Степенная функция

$$w = z^n,$$

$n$  — целое.

Эта функция имеет производную, вычисляемую по формуле

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots).$$

При  $n > 0$  ее удобно вычислить как предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1},$$

применяя формулу бинома Ньютона.

При  $n < 0$  теперь можно воспользоваться формулой (7).

Функция  $z^n$  при  $n \geq 0$  аналитическая на всей плоскости  $z$ , а при  $n < 0$  на всей плоскости с выколотой из нее точкой  $z = 0$ .

Функции  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{tg} z$ .

Первые три из этих функций определены в нашей книге «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 9.13, как суммы степенных рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots.$$

Радиус сходимости каждого из этих рядов равен  $\infty$ . Поэтому производные от этих функций могут быть получены для любого  $z$  почленным дифференцированием соответствующих рядов:

$$(e^z)' = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = e^z.$$

$$(\sin z)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = -\sin z.$$

Формулы для тригонометрических функций суммы комплексных аргументов остаются такими же, как и в случае действительного переменного.

Функция  $\operatorname{tg} z$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Ее производная равна

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad (\cos z \neq 0),$$

что следует из формулы (7).

Функция  $a^z$  ( $a > 0$ ) может быть определена по формуле

$$a^z = e^{z \ln a} = \exp(z \ln a).$$

Ее производная вычисляется на основании формулы (8) о производной сложной функции:

$$(a^z)' = (e^{z \ln a})' = e^{z \ln a} \ln a = a^z \ln a.$$

Гиперболические функции  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$  определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z. \quad (9)$$

Заменяя в (9)  $z$  на  $iz$ , получаем

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z. \quad (10)$$

Отметим еще легко проверяемую формулу

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Формулы сложения для гиперболических функций легко получить из (9) и (10) соответствующих формул для тригонометрических функций от комплексного переменного. Например:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \cos i(z_1 + z_2) = \\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2 = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \\ &\quad + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \end{aligned}$$

Производные от этих функций вычисляются на основании формул (5), (7), (8):

$$(\operatorname{sh} z)' = \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \quad (\operatorname{ch} z \neq 0).$$

Пример. Выделить действительную и мнимую части у функции  $w = \cos z$  и найти нули этой функции.

Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ . Имеем  $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos yi - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ .

Таким образом,  $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ ,  $v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y$ .

Чтобы найти нули функции  $\cos z$ , мы должны приравнять нулю ее действительную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} \cos xchy &= 0, \\ \sin xshy &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решим эту систему. Так как  $chy \neq 0$  для любого действительного  $y$ , то из первого уравнения получаем  $\cos x = 0$ .

Из второго уравнения при  $y \neq 0$  получаем, что  $\sin x = 0$ . При действительных  $x$  косинус и синус не обращаются одновременно в нуль, поэтому при  $y \neq 0$  система решений не имеет. Если же  $y = 0$ , то  $shy = 0$  и второе уравнение удовлетворяется при любых  $x$ . Таким образом, нули функции  $\cos z$  расположены на действительной оси  $x$  и совпадают с нулями  $\cos x$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Из этого утверждения следует, что нули функции  $\operatorname{ch} z$  совпадают с нулями функции  $\cos y$ , где  $y = \operatorname{Im} z$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Отметим еще § 6.15, посвященный линейной и дробно-линейной функциям; его можно читать и непосредственно после настоящего § 6.2.

### § 6.3. Условия Даламбера–Эйлера (Коши–Римана)

Рассмотрим комплексную функцию

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z \in D),$$

определенную на области  $D$  комплексной плоскости. Пусть она имеет производную в точке  $z \in D$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta w &= [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + \\ &+ i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом способе стремления  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  к нулю должен существовать предел (1), равный одному и тому же комплексному числу  $f'(z)$ . В частности, это должно иметь место, если а)  $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$  и  $\Delta x \rightarrow 0$  или, если б)  $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ .

В первом случае (см. § 6.1, (3))

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Во втором случае

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \\
&= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \\
&\quad + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Но тогда должны выполняться равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

которые обычно называют *условиями Коши–Римана*. Некоторое время думали, что именно Коши и Риман впервые получили эти условия. Теперь выяснилось, что они были известны еще Эйлеру и Даламберу.

Итак, нами доказана

**Теорема 1.** *Если функция*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

*имеет производную в точке  $z = x + iy$ , то ее действительные компоненты  $u$  и  $v$  имеют в точке  $(x, y)$  частные производные первого порядка, удовлетворяющие условию Коши–Римана.*

Теорему 1 можно обратить, правда при добавочном предположении, что частные производные от  $u$  и  $v$  непрерывны.

**Теорема 2.** *Если функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имеют в точке  $(x, y)$  непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям Коши–Римана, то функция комплексной переменной  $f(z) = u + iv$  имеет в точке  $z = x + iy$  производную.*

**Доказательство.** Пусть функции  $u$  и  $v$  имеют непрерывные частные производные в точке  $(x, y)$ . Тогда они дифференцируемы в этой точке, т. е. их приращения, соответствующие приращениям  $\Delta x, \Delta y$ , могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \\ \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o_2(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0),\end{aligned}$$

где  $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $o_1(\rho)$  и  $o_2(\rho)$  ( $\rho \rightarrow 0$ ) — бесконечно малые функции высшего порядка малости чем  $\rho$ , т. е.

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0$  ( $j = 1, 2$ ). Поэтому, учитывая, что  $o_1(\rho) + i o_2(\rho) = o(\rho)$  ( $\rho \rightarrow 0$ ), имеем (в силу (2))

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} + \\ &+ \frac{o(\rho)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} (-\Delta y + i \Delta x)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + o(1),\end{aligned}$$

потому что  $\left| \frac{\rho}{\Delta z} \right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$ . Символ  $o(1)$   $\rho \rightarrow 0$  означает бесконечно малую функцию при  $\rho \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

т. е. функция  $f$  имеет в точке  $z$  производную, равную

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Используя условия (2), можно получить и другие формы для выражения производной  $f'(z)$ . Теорема доказана.

Если учесть, что существование производной  $f'(z)$  на области  $D$  автоматически влечет за собой ее непрерывность на  $D$ , то из теорем 1 и 2 вытекает следующая

**Теорема 3.** Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

была аналитической на области  $D$  плоскости  $z$ , необходимо и достаточно, чтобы частные производные первого порядка функций  $u$  и  $v$  были непрерывны на  $D$  и выполнялись условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad ((x, y) \in D).$$

Функции  $u$  и  $v$  называют сопряженными друг к другу на  $D$ .

**Пример 1.** Функции  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$  не являются аналитическими на плоскости  $z$ . Ведь каждая из них может быть записана в виде  $f(z) = u + iv$ , где  $u \neq 0$  и  $v \equiv 0$  – действительные функции, очевидно, не удовлетворяющие условиям Коши – Римана.

**Пример 2.** Проверить выполнение условий Коши–Римана для действительной и мнимой частей функции  $w = \cos z$ .

В примере 1 § 6.2 мы показали, что

$$u(x, y) = \cos x \cosh y, \quad v(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\forall x, y),$$

т. е. условия Коши–Римана выполнены.

Так как частные производные первого порядка от функций  $u$  и  $v$  непрерывны для любых точек  $(x, y)$ , то функция  $w = \cos z$  аналитична на всей комплексной плоскости.

**Задача.** Записать функции  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $z^n$  ( $n$  – натуральное) в виде

$$f(z) = u + iv,$$

где  $u = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v = \operatorname{Im} f(z)$ , и убедиться в том, что они удовлетворяют условиям Коши – Римана.

**Замечание.** Если функцию  $f(z)$  представить в виде

$$f(z) = R(x, y) \exp(i\Phi(x, y)),$$

где  $R$  – модуль, а  $\Phi$  – аргумент функции  $f(z)$ , то условия Коши – Римана имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

## § 6.4. Гармонические функции

Пусть на области  $D$  плоскости  $z$  задана аналитическая функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Тогда, как это уже было отмечено в § 6.2, функция  $f(z)$  имеет на  $D$  непрерывные производные любого порядка. Но тогда функции  $u$  и  $v$  имеют на  $D$  непрерывные частные производные любого порядка, а первые производные удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

из которых следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Левую часть уравнения (2) обозначают символом

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Уравнение

$$\Delta u = 0 \quad (3)$$

называют *уравнением Лапласа*. Символ  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

называют *оператором Лапласа*



Функцию  $u$ , имеющую непрерывные частные производные второго порядка на  $D$  и удовлетворяющую уравнению Лапласа (3), называют *гармонической на  $D$* .

Итак, мы установили, что *действительная часть аналитической на  $D$  функции является гармонической функцией на  $D$* .

Если первое равенство в (1) продифференцировать по  $y$ , а второе — по  $x$  и вычесть второе равенство из первого, то будем иметь

$$\Delta v = 0,$$

т. е. и *мнимая часть аналитической функции является гармонической функцией*.

Однако функция  $f(z) = u + iv$ , где  $u$  и  $v$  — произвольные гармонические на  $D$  функции, не всегда является аналитической на  $D$ . Она будет аналитической, только если функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют на  $D$  условиям Коши–Римана

Покажем, что если  $D$  есть односвязная область, то для всякой гармонической на  $D$  функции  $u(x, y)$  существует единственная, с точностью до произвольной постоянной, сопряженная к  $u$  на  $D$  функция  $v$  такая, что

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитическая на  $D$ .

Пусть задана на  $D$  гармоническая функция  $u(x, y)$ . Положим

$$P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как  $u$  имеет на  $D$  непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяющие уравнению Лапласа, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Из полученного равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{на } D$$

и односвязности  $D$  следует (см. § 3.4), что криволинейный интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (Pdx + Qdy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = v(x, y) \quad (4)$$

вдоль любого кусочно-гладкого пути  $L \subset D$ , соединяющего точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ , зависит от этих точек, но не зависит от формы пути. При этом  $v$  есть функция, потенциальная для вектора  $(P, Q)$  на  $D$ , т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Это показывает, что  $v$  имеет непрерывные частные производные на  $D$ , удовлетворяющие вместе с  $u$  условиям Коши-Римана. Но тогда  $u$  и  $v$  — сопряженные друг к другу функции.

Если  $v_1$  — другая функция, сопряженная к  $u$  на  $D$ , то

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует:

$$\frac{\partial(v_1 - v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(v_1 - v)}{\partial y} = 0 \text{ на } D.$$

Но тогда  $v_1 - v = C$  на  $D$ , где  $C$  — постоянная. Утверждение доказано.

**Пример 1.** Функция  $u = x^2 - y^2$  удовлетворяет, очевидно, уравнению  $\Delta u = 0$ . Найти аналитическую функцию  $f(z)$ , у которой  $\operatorname{Re} f(z) = u$ .

Мнимую часть этой функции ищем по формуле (4) (рис. 134):

$$\begin{aligned} v &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2ydx + 2xdy) = \\ &= \int_0^x (2 \cdot 0 + 2x \cdot 0)dx + \int_0^y (2y \cdot 0 + 2x)dy = \\ &= \int_0^y 2x dy = 2xy + C. \end{aligned}$$

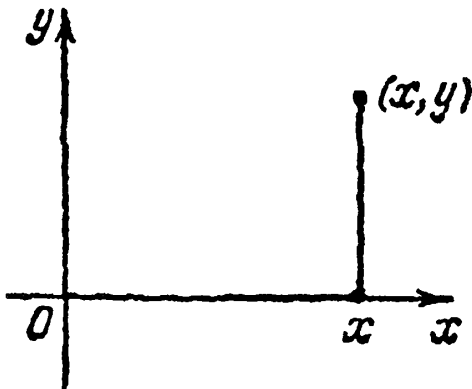


Рис. 134

Тогда функция  $f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$  аналитическая во всей комплексной плоскости.

**Пример 2.** Функция  $w = z = x + iy$  аналитическая на плоскости  $z$ . Следовательно, функции  $u=x$ ,  $v=y$  гармонические и удовлетворя-

ют условиям Коши – Римана на плоскости  $z$ . Это можно проверить непосредственно.

**Пример 3.** Функции  $u = x$ ,  $v = -y$  гармонические, но условия Коши–Римана для них не выполнены, поэтому функция  $f(z) = x + i(-y) = \bar{z}$  не является аналитической.

Убедимся в этом непосредственно:  $w = \bar{z} = x - iy$ ,

$$\begin{aligned} \Delta w &= \overline{(z + \Delta z)} - \bar{z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z} = \overline{\Delta z}, \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \\ &= \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Выбираем два пути подхода точки  $z + \delta z$  к точке  $z$ , а именно, а)  $\Delta z = 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ; б)  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y = 0$ . Тогда:

$$\text{в случае а) } \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1, \text{ т. е. } \frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow -1;$$

$$\text{в случае б) } \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ т. е. } \frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow 1.$$

Таким образом, предела  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  не существует

и функция  $w = \bar{z}$  не имеет производной в любой точке плоскости.

**З а м е ч а н и е.** В полярных координатах  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  гармоническая функция  $u(x, y)$  перейдет в некоторую новую функцию относительно координат  $\rho$  и  $\theta$

$$u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \omega(\rho, \theta).$$

Легко видеть, что

$$\omega'_\rho = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta,$$

$$\omega''_{\rho^2} = u''_{x^2} \cos^2 \theta + 2u''_{xy} \cos \theta \sin \theta + u''_{y^2} \sin^2 \theta,$$

$$\omega'_\theta = -u'_x \rho \sin \theta + u'_y \rho \cos \theta,$$

$$\omega''_{\theta^2} = u''_{x^2} \rho^2 \sin^2 \theta - 2u''_{xy} \rho^2 \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ u''_{y^2} \rho^2 \cos^2 \theta - \rho u'_x \cos \theta - \rho u'_y \sin \theta.$$

Отсюда

$$\omega''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \omega'_\rho + \frac{1}{\rho^2} \omega''_{\theta^2} = u''_{x^2} + u''_{y^2} = \Delta u = 0.$$

В связи с этим равенством пишут

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

и правую часть этого символического равенства называют оператором Лапласа в полярных координатах. Мы доказали, что

$$\Delta \omega(\rho, \theta) = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

## § 6.5. Обратная функция

Пусть задана аналитическая функция

$$w = f(z) \quad (z \in D), \quad (1)$$

отображающая область  $D$  плоскости  $z$  на область  $G$  плоскости  $w$  взаимно однозначно (или одно-однозначно). Это значит, что каждому  $z \in D$  соответствует при помощи функции (1) одно значение  $w \in G$  и при этом каждое  $w \in G$  в силу этого закона соответствует только одному значению  $z \in D$ . Этим определена на  $G$  однозначная функция

$$z = \varphi(w) \quad (w \in G), \quad (2)$$

обладающая тем свойством, что

$$f[\varphi(w)] = w \quad (w \in G).$$

Имеет место, очевидно, и другое равенство

$$\varphi[f(z)] = z \quad (z \in D).$$

Функция  $z = \varphi(w)$  называется *обратной функцией* к функции  $w = f(z)$  ( $z \in D$ ).

Покажем, что если

$$f'(z) \neq 0 \quad (z \in D),$$

то функция  $z = \varphi(w)$  есть аналитическая функция на  $G$ .

В самом деле, пусть точки  $w, w + \Delta w \in G$ . Этим точкам соответствуют при помощи обратной функции точки  $z, z + \Delta z$ . Так как по условию функция  $f$  имеет производную в точке  $z$ , то она непрерывна в этой точке:  $\Delta w \rightarrow 0$ , если  $\Delta z \rightarrow 0$ . В силу указанной взаимной однозначности верно и обратное, как это можно доказать, но мы доказательство опускаем,  $\Delta z \rightarrow 0$ , если  $\Delta w \rightarrow 0$ . Но тогда

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)} \quad (f'(z) \neq 0).$$

Это показывает, что производная от обратной функции  $z = \varphi(w)$  существует в точке  $w$  и равна

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad (w \in G). \quad (3)$$

Так как  $w$  — произвольная точка  $G$ , то функция  $\varphi(w)$  аналитическая на  $G$ .

Пример. Функция<sup>1</sup>

$$w = az + b$$

при  $a \neq 0$  отображает всю плоскость  $z$  на всю плоскость  $w$  взаимно однозначно. При этом обратная функция имеет вид

$$z = \frac{w - b}{a}.$$

Непосредственно видно, что обе эти функции аналитичны соответственно на плоскостях  $z$  и  $w$  ( $w' = a$ ,  $z' = \frac{1}{a}$ ).

Функция  $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$  ( $n$  — натуральное). Плоскость  $R$  точек  $z$  разрежем на  $n$  секторов лучами

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n}k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

выходящими из нулевой точки (см. рис. 135, где  $n = 3$ ). Пусть  $D_k$  есть сектор

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1} \quad (\rho > 0), \quad (4)$$

точнее, множество точек  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$ , имеющих аргумент  $\theta = \arg z$ , удовлетворяющий неравенствам (4). Очевидно,  $D_k$  есть область. Обозначим также через  $D_k^*$  множество, получаемое добавлением к  $D_k$  луча  $\theta = \theta_k$  (вместе с нулевой точкой). Точки  $D_k^*$  можно записать в виде

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}, \rho \geq 0).$$

Положим еще

$$\theta = \theta_k + \psi \quad (\theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}).$$

Если  $0 \leq \psi < \theta_1 = 2\pi/n$ , то  $\theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}$  и обратно.

Функция  $w = z^n$  отображает  $D_k^*$  взаимно однозначно и непрерывно на всю плоскость

<sup>1</sup> Подробнее об этой функции см. § 6.15.

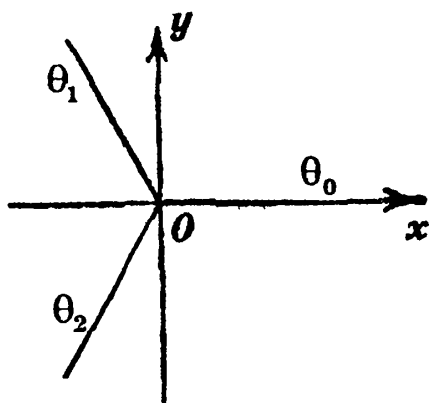


Рис. 135

$$w = re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

которую обозначим через  $R'$ .

В самом деле,

$$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in\left(\frac{2\pi}{n}k + \psi\right)} = \rho^n e^{in\psi},$$

поэтому

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \left(0 \leq \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n}\right),$$

откуда

$$\rho = r^{1/n} = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \varphi/n,$$

где  $\sqrt[n]{r}$  есть арифметическое значение корня  $n$ -й степени из  $r$ , т. е. неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $r$ . Из сказанного следует, что функция  $w = z^n$  на множестве  $D_k^*$  имеет обратную функцию

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \\ (k = 0, 1, \dots, n-1; w \in R'). \quad (5)$$

Вообще же функция  $w = z^n$  имеет обратную  $n$ -значную функцию

$$z = \sqrt[n]{w},$$

имеющую  $n$  непрерывных ветвей (5), соответствующих числам  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Ветви (5), определяемые числами  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , отображают  $R'$  соответственно на  $D_0^*$ ,  $D_1^*$ , ...,  $D_{n-1}^*$ .

Чтобы вычислить производную от  $k$ -й ветви, нам придется рассмотреть область  $D_k \subset D_k^*$ . Обозначим через  $R'_1$  пространство  $R'$  без луча  $\varphi = 0$ .

Аналитическая функция  $w = z^n$  отображает взаимно однозначно  $D_k$  на  $R'_1$ . При этом соответствующая обратная функция определяется по формулам (5). В силу (3) производная от нее равна ( $z \in D_k$ )

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{w}\right)' &= \left(\sqrt[n]{w}\right)'_k = \frac{1}{(z^n)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{r e^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i\left(\frac{1}{n}-1\right)(\varphi+2k\pi)} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

Рассматривая области  $D_k$  вместо множеств  $D_k^*$ , мы исключаем из рассмотрения лучи  $\theta = \theta_k$  плоскости  $R$ . Если бы нас интересовало поведение функции  $z^n$  в окрестности этих лучей, то следовало бы плоскость  $R$  разрезать лучами

$$\theta = \theta_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi/n, k = 0, 1, \dots, n-1)$$

и считать, что  $D_k, D_k^*$  суть множества точек  $z \in R$ , определяемых соответственно неравенствами

$$\theta_k + \alpha < \theta < \theta_{k+1} + \alpha, \quad \theta_k + \alpha \leq \theta < \theta_{k+1} + \alpha.$$

**Функции  $e^z, \ln z$ . Функция**

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy)$$

аналитическая на плоскости  $R$  точек  $z$ . Она не равна нулю для всех  $z \in R$ . Это видно из того, что

$$e^x \neq 0 \text{ и } |e^{iy}| = 1.$$

Обозначим через  $R'$  плоскость точек  $w$ , через  $R''_0$  — эту плоскость с выкинутой из нее точкой  $O$  и через  $R'_1$  — эту плоскость с выкинутым из нее положительным лучом оси  $x$ .

Из дальнейшего мы увидим, что образ  $R$  при помощи функции  $w = e^z$  есть область  $R'_0$ . Однако отображение  $R$  на  $R'_0$  не взаимно однозначно — обратная функция к функции  $w = e^z$ , называемая *натуральным логарифмом  $w$*  и обозначаемая через

$$z = \ln w \quad (w \in R'_0),$$

бесконечнозначна. Ниже мы определяем эту функцию.

Для этого разрежем  $R$  на полосы прямыми (рис. 136)

$$y = y_k = 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Открытую полосу  $y_k < y < y_{k+1}$  обозначим через  $D_k$  и полузамкнутую полосу  $y_k \leq y < y_{k+1}$  — через  $D_k^*$ .

Замена переменной  $y$  на  $\eta$  при помощи равенства

$$y = y_k + \eta$$

преобразовывает полосу  $D_k^*$  точек  $z = x + iy$  на полосу  $D_1^*$  точек  $x + i\eta$  взаимно однозначно.

Рассмотрим функцию  $w = e^z$  на множестве  $D_k^*$ . Полагая  $z = x + iy, w = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , будем иметь

$$w = re^{i\varphi} = e^x e^{iy} = e^x e^{i(2k\pi + \eta)} = e^x e^{i\eta} \quad (0 \leq \eta < 2\pi),$$

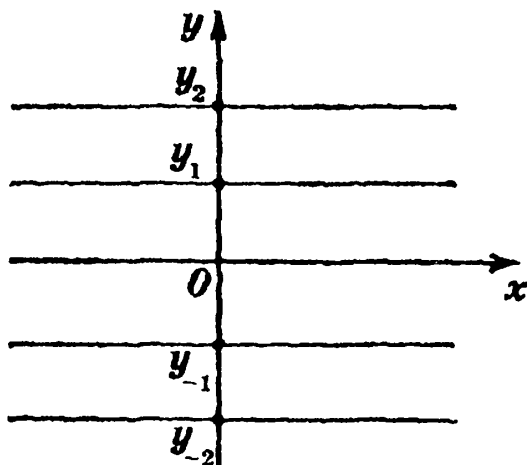


Рис. 136

откуда

$$r = e^x, \varphi = \eta.$$

Таким образом,

$$x = \ln r = \ln|w|,$$

$$y = y_k + \eta = y_k + \varphi = 2k\pi = \arg w \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Следовательно, функция  $w = e^z$  имеет на полосе  $D_k^*$  обратную однозначную функцию

$$z = x + iy = (z)_k = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad (6)$$

$$(k = 0, \pm 1, \dots, w \in R'_0).$$

Вообще же функция  $w = e^z$  имеет обратную бесконечнозначную функцию

$$z = \ln w \quad (w \in R'_0),$$

имеющую бесконечное число непрерывных ветвей (6), соответствующих числам  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Область  $D_k$  преобразуется при помощи аналитической функции  $w = e^z$  на область  $R'_1$  плоскости  $w$  взаимно однозначно. Обратная к ней однозначная функция, определяемая для данного  $k$  равенством (6), аналитическая на  $R'_1$ . Ее производную лучше всего вычислить с помощью формулы (3):

$$(\ln w)' = (\ln w)'_k = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w} \quad (w \in R'_1). \quad (7)$$

Подчеркнем, что мы здесь вычислили производную не от многозначной функции  $\ln w$ , а от ее определенной однозначной ветви, соответствующей некоторому  $k$ .

Тот факт, что производная оказалась равной функции  $1/w$ , не зависящей от  $k$ , объясняется тем, что разные ветви (6) отличаются на постоянную.

При вычислении производной от  $z = \ln w$  мы считали, что точки  $z$  принадлежат к областям  $D_k$ , исключив из рассмотрения прямые  $y = y_k$  плоскости  $R$ .

Если бы мы интересовались поведением рассмотренных функций на прямых  $y = y_k$ , то тогда следовало бы разрезать плоскость  $R$  сдвинутыми прямыми

$$y = y_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi, y_k = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

считая таким образом, что  $D_k$  есть область точек  $z = x + iy$ , для которых  $y_k + \alpha < y < y_{k+1} + \alpha$ .



Степенная функция  $z^\alpha$  ( $\alpha$  — действительное число) определяется по формуле

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

или

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8')$$

где

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Если  $\alpha$  — целое, то

$$e^{i\alpha 2k\pi} = 1$$

и

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha,$$

где  $z^\alpha$  понимается в обычном смысле как произведение  $\alpha$  множителей  $z$ .

Если  $\alpha = \pm p/q$ , где  $p > 0$ ,  $q > 0$ , — целые, то числа справа в (8') существенно различны лишь при  $k = 0, 1, \dots, q-1$ :

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, 1, \dots, q-1).$$

В частности, при  $\alpha = 1/n$  и  $n$  натуральном мы получили уже эти факты (см. (5)).

Если же  $\alpha$  — иррациональное число, то функции, определяемые формулой (8) или (8') для разных  $k$ , различны. Это непрерывные ветви многозначной (бесконечнозначной) функции  $w = z^\alpha$ .

Имеем далее ( $z = \rho e^{i\theta}$ )

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \frac{e^{\alpha[\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)]}}{e^{[\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)]}} =$$

$$= \alpha e^{(\alpha-1)[\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha-1},$$

т. е. равенство

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}, \quad (9)$$

верное для любой ветки  $z^\alpha$ . При этом, с каким  $k$  взята ветвь  $z^\alpha$  в левой части (9), с таким же  $k$  надо взять ветвь  $z^{\alpha-1}$  в правой части.

**З а м е ч а н и е.** Обратные функции для тригонометрических и гиперболических функций можно ввести аналогичным образом.

Например, функция  $w = \operatorname{Arcsin} z$  является обратной к функции  $z = \sin w$ , т. е.  $\sin [\operatorname{Arcsin} z] = z$ .

Из уравнения

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

находим

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \quad e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

т. е.

$$iw = \ln|iz \pm \sqrt{1 - z^2}| + i[\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi].$$

Таким образом,

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i[\ln|iz \pm \sqrt{1 - z^2}| + i[\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi]]$$

— бесконечнозначная функция ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Аналогично можно получить

$$\operatorname{Arccos} z = -i[\ln|z \pm \sqrt{z^2 - 1}| + i[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi]],$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \left[ \ln \left| \frac{1 + zi}{1 - zi} \right| + i \left( \arg \frac{1 + zi}{1 - zi} + 2k\pi \right) \right],$$

$$\operatorname{Arsh} z = \ln|z \pm \sqrt{z^2 + 1}| + i[\arg(z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2k\pi],$$

$$\operatorname{Arch} z = \ln|z \pm \sqrt{z^2 - 1}| + i[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi].$$

## § 6.6. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть  $w = f(z) = u + iv$  — непрерывная функция комплексного  $z$ , определенная в области  $D$  и  $L$  — гладкая кривая, лежащая в  $D$ , с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  (рис. 137), заданная уравнением

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

или, что все равно, двумя уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (1)$$

Как всегда, направление на  $L$  соответствует изменению параметра  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  ( $A = z(\alpha)$ ,  $B = z(\beta)$ ).

Интеграл от функции  $f(z)$  вдоль кривой  $L$  определяется следующим образом:

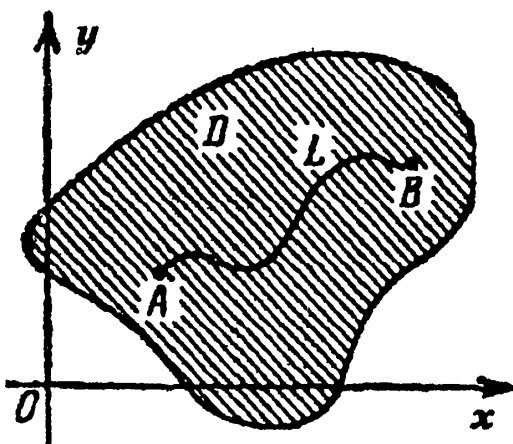


Рис. 137

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L (udx - vdy) +$$

$$+ i \int_L (vdx + udy) = \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]dt +$$

$$+ i \int_\alpha^\beta [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (2)$$

Если учесть, что  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  и  $u(x(t), y(t)) = u(z(t))$ , то равенство (2) можно коротко записать так:

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt. \quad (3)$$

Таким образом, из (2) видно, что интеграл по комплексному переменному есть сумма двух криволинейных интегралов, и его вычисление сводится к вычислению обыкновенных интегралов.

Интеграл (2) существует для любой непрерывной функции  $f(z)$  (в этом случае функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  также непрерывны) и любой гладкой кривой  $L$  (т. е. когда  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  непрерывны и  $x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$ ).

Если кривая  $L$  кусочно-гладкая и состоит из гладких ориентированных кусков  $L_1, \dots, L_n$ , то по определению считаем

$$\int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{L_k} f(z) dz. \quad (4)$$

На основании свойств криволинейного интеграла легко получаем

$$1) \quad \int_L f(z) dz = - \int_{L_-} f(z) dz,$$

где  $L_-$  та же кривая, что и  $L$ , но ориентированная противоположно (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 7.4).

$$2) \quad \int_L [Af(z) + B\varphi(z)] dz = A \int_L f(z) dz + B \int_L \varphi(z) dz,$$

где  $A, B$  — постоянные числа.

3) Если  $|f(z)| \leq M$  при  $z \in L$ , то

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq Ml,$$

где  $l$  — длина  $L$ .

В самом деле, на основании свойства обыкновенного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f[z(t)]| \cdot |z'(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |z'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = Ml. \end{aligned}$$

Пример 1.

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad (5)$$

где  $L$  есть окружность с центром в точке  $z_0$ , ориентированная против часовой стрелки.

В самом деле, уравнение  $L$  можно записать в форме

$$z = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

где  $\rho$  — радиус окружности  $L$ . Поэтому

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Пример 2. При целом  $n \neq -1$

$$\int_L (z - z_0)^n dz = 0, \quad (6)$$

где  $L$  — снова окружность с центром в точке  $z_0$ , ориентированная против часовой стрелки.

В самом деле,

$$\int_L (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t} dt =$$

$$= i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i\rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (n+1 \neq 0),$$

потому что  $e^{i2(n+1)\pi} = 1$  для любых целых  $n$ .

**Теорема 1 (Коши).** Если функция  $f(z)$  аналитическая на односвязной области  $D$ , то интеграл от  $f(z)$  по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру  $\Gamma$ , принадлежащему  $D$ , равен нулю:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

**Доказательство.** Так как  $f(z) = u + iv$  — аналитическая на  $D$  функция, то функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы, и выполняются условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

в силу которых выражения  $vdx + udy$  и  $u dx - vdy$  есть полные дифференциалы некоторых функций. Поэтому криволинейные интегралы по замкнутому контуру  $\gamma$  от этих выражений равны нулю (см. § 3.4 и 3.5). Но тогда, согласно равенству (2),

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i \int_{\Gamma} (vdx + udy) = 0.$$

**Пример 3.**

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{\Gamma} e^z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} a^z dz = 0 \quad (a > 0),$$

$$\int_{\Gamma} \sin z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \cos z dz = 0,$$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{sh} z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \operatorname{ch} z dz = 0,$$

где  $\Gamma$  — произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур, потому что подынтегральные функции аналитические на плоскости  $z$ . Ведь они имеют непрерывную производную во всех точках  $z$  комплексной плоскости.

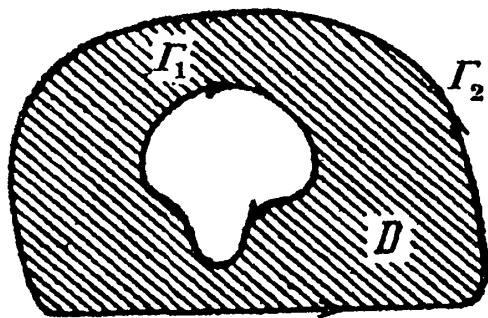


Рис. 138

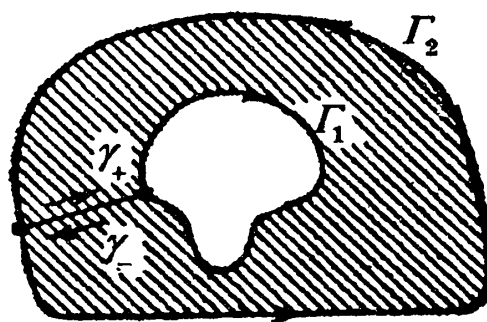


Рис. 139

Как следствие из теоремы 1 получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть область  $D$  комплексной плоскости ограничена сложным положительно ориентированным кусочно-гладким контуром  $\Gamma$ , т. е. при обходе по  $\Gamma$  точки  $D$  остаются слева. Тогда для функции  $f(z)$ , аналитической на  $\bar{D}$ , имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Поясним эту теорему. На рис. 138 изображена двусвязная область  $D$  с кусочно-гладким контуром  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , ориентированным положительно.

Соединим контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  гладким куском  $\gamma$ , как на рис. 139. Ориентируем  $\gamma$  двумя противоположными способами:  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ . В результате получим новую область  $D^1$  односвязную, ограниченную ориентированным контуром  $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$ . По теореме 1

$$\int_{\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-} f(z) dz = 0.$$

Но

$$\int_{\gamma_- + \gamma_+} f(z) dz = \int_{\gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz = 0,$$

поэтому

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Каждый из интегралов  $\int_{\Gamma_1}$ ,  $\int_{\Gamma_2}$  при этом может и не равняться нулю.

**Замечание 1.** Для краткости мы будем позволять себе писать «контур» вместо «замкнутый непрерывный кусочно-гладкий контур».

Из теоремы 2 как следствие вытекает

**Теорема 3.** Пусть область  $D$  ограничена внешним контуром  $\Gamma$ , ориентированным против часовой стрелки, и внутренними контурами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ , ориентированными тоже против часовой стрелки (как на рис. 140, где  $N = 3$ ), и пусть на  $\bar{D}$  задана аналитическая функция  $f(z)$ .

Тогда имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (8)$$

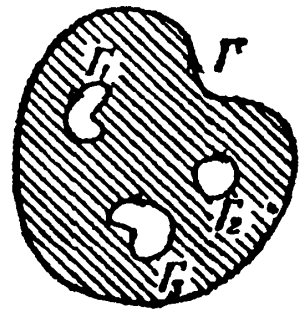


Рис. 140

В самом деле, если считать, что  $\Gamma_k^-$  — тот же контур, что и  $\Gamma_k$ , но ориентированный по часовой стрелке, то по теореме 2

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0,$$

откуда следует (8), потому что

$$\int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Отметим, что если в теореме 3  $N = 1$ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz \quad (9)$$

(рис. 141).

**Замечание 2.** Из равенства (9), т. е. из теоремы 3 при  $N = 1$  следует, что равенства (5) и (6) остаются верными, если в них окружность  $L$  с центром в точке  $z_0$  заменить на любой замкнутый кусочно-гладкий контур  $L'$ , содержащий внутри точку  $z_0$  и ориентированный против часовой стрелки:

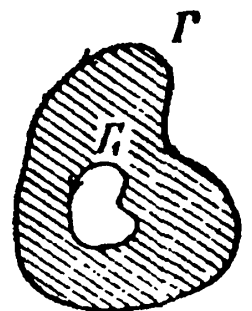


Рис. 141

$$\int_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad (10)$$

$$\int_{L'} (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n \neq -1). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) являются *основными* в этой теории. Именно к ним, как мы увидим, обычно сводится вычисление криволинейных интегралов от аналитических функций (см. далее § 6.10 и 6.11).

### § 6.7. Формула Коши

Пусть функция  $f(z)$  аналитическая в односвязной замкнутой области  $\bar{D}$  ( $\bar{D} = D \cup \partial D$ ), с кусочно-гладкой границей  $L$ , ориентированной в положительном направлении (рис. 142), т. е. против часовой стрелки. Тогда имеет место формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad (1)$$

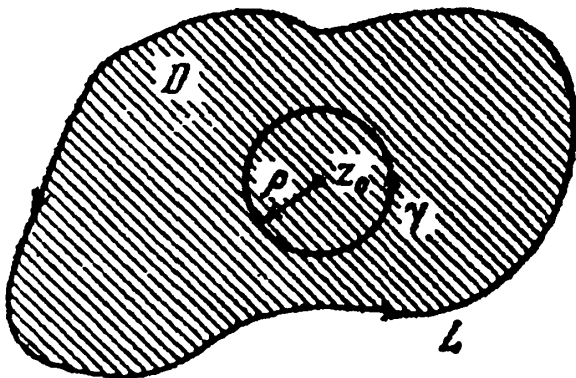
где  $z_0$  — любая точка внутри контура  $L$ .

Таким образом, аналитическую функцию достаточно определить на контуре  $L$ , а по формуле (1) можно автоматически получить ее значения в других точках  $D$ .

Для доказательства формулы (1) рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2)$$

Опишем около точки  $z_0$  окружность  $\gamma \subset D$  (см. рис. 142), ориентированную положительно, достаточно малого радиуса  $\rho$ . Функция  $\varphi(z)$  определена и непрерывна на  $\bar{D}$  за исключением точки  $z_0$ , в которой ее предел равен производной от  $f$  в  $z_0$ :



$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) &= \int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \\ &= f'(z_0). \end{aligned}$$

Рис. 142



Поэтому, если доопределить функцию  $\varphi$  в  $z_0$  при помощи равенства  $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ , то она окажется определенной, непрерывной и ограниченной на  $\bar{D}$ :

$$|\varphi(z)| \leq M, \quad \forall z \in \bar{D}.$$

К тому же функция  $\varphi$  аналитична на множестве, ограниченном контурами  $\gamma$  и  $L$  и по теореме 3 § 6.6

$$\int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \varphi(z) dz.$$

Но правая часть этого равенства стремится при  $\rho \rightarrow 0$  к нулю:

$$\left| \int_\gamma \varphi(z) dz \right| = \left| \int_{|z-z_0|=\rho} \varphi(z) dz \right| \leq M 2\pi\rho \rightarrow 0,$$

а левая не зависит от  $\rho$ . Поэтому

$$\int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Так как (см. (10) § 6.6)

$$\int_L \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

формула Коши доказана.

Формула Коши имеет место и для многосвязной области и доказательство ее может быть сведено к уже доказанной формуле Коши для односвязной области.

На рис. 143 изображена двусвязная область  $D$  с положительно ориентированной границей  $L$ , состоящей из двух

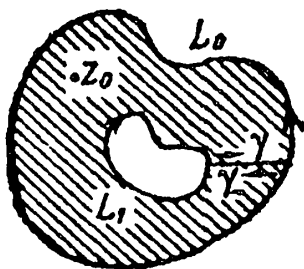


Рис. 143

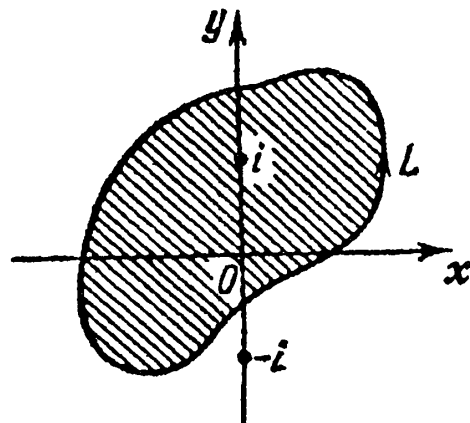


Рис. 144

замкнутых соответственно ориентированных контуров ( $L = L_0 + L_1$ ).

Пусть  $z_0$  — произвольная точка  $D$ . Соединим контуры  $L_0$  и  $L_1$  кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ , ориентированной от  $L_1$  и  $L_0$ , не проходящей через точку  $z_0$ . Наряду с кривой  $\gamma$  вводим совпадающую с ней кривую  $\gamma_-$ , но ориентированную противоположно.

Если из  $D$  выкинуть  $\gamma$ , то оставшаяся область  $D_*$  будет односвязной с положительно ориентированной границей:

$$L' = L_0 + \gamma_- + L_1 + \gamma = L + \gamma_- + \gamma.$$

Функция  $f(z)$  аналитическая на  $\bar{D}_*$  и  $z_0 \in D_*$ . Поэтому на основании теоремы Коши для односвязной области

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_L + \int_\gamma + \int_{\gamma_-} \right) \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \end{aligned}$$

потому что  $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$ .

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz,$$

где  $L$  — ориентированный против часовой стрелки контур, содержащий в себе точку  $z = i$  (рис. 144) и такой, что точка  $z = -i$  находится вне него.

Запишем наш интеграл в виде

$$\int_L \frac{\sin z dz}{(z + i)(z - i)}$$

и рассмотрим функцию  $f(z) = \sin z / (z + i)$ . В силу наших предположений о контуре  $L$  эта функция аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром  $L$ , поэтому по формуле Коши

$$\int_L \frac{\sin z dz}{z^2 + 1} = \int_L \frac{f(z)}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi \sin i = \pi \operatorname{sh} 1.$$

## § 6.8. Интеграл типа Коши

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

где  $f(z)$  – аналитическая функция на замкнутой области  $\bar{D}$ , ограниченной положительно ориентированным контуром  $\mathfrak{L}$ , называется *интегралом Коши*.

Если  $z_0$  лежит внутри  $L$ , то интеграл равен  $f(z_0)$ , если же  $z_0$  лежит вне  $\mathfrak{L}$ , то  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  – аналитическая функция на  $\bar{D}$  и, следовательно, интеграл Коши равен нулю.

Пусть теперь  $\mathfrak{L}$  – любая кусочно-гладкая ориентированная кривая, не обязательно замкнутая, и  $\varphi(z)$  – непрерывная функция, определенная вдоль  $\mathfrak{L}$ . Выражение

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz \quad (1)$$

называется интегралом типа Коши. Оно представляет собой функцию  $F(z_0)$ , определенную вне  $\mathfrak{L}$  ( $z_0 \notin \mathfrak{L}$ ).

**Теорема 1.** *Интеграл (1) типа Коши есть аналитическая функция  $F(z_0)$  для всех  $z_0 \notin \mathfrak{L}$ .*

*Производная порядка  $n$  от  $F(z_0)$  вычисляется по формуле*

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $\sigma$  есть произвольный круг, не имеющий общих точек с кривой  $\mathfrak{L}$ . Функция двух комплексных переменных  $z_0$  и  $z$

$$\Phi(z_0, z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$$

непрерывна на множестве  $\sigma \times \mathfrak{L}$  ( $z_0 \in \sigma$ ,  $z \in \mathfrak{L}$ ) и имеет на нем непрерывную частную производную

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^2}$$

(надо учесть, что так как круг  $\sigma$  не пересекается с  $\mathfrak{L}$ , то при любых  $z_0 \in \sigma$  и  $z \in \mathfrak{L}$  разность  $z - z_0 \neq 0$ ). Это пока-

зывает, что дифференцирование  $F(z_0)$  по параметру  $z_0$  законно произвести под знаком интеграла в (1):

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

При этом производная  $F'(z_0)$  непрерывна вне  $\mathcal{L}$  (см. § 2.4, теорема 4, которая легко обобщается на случай интеграла от комплексного переменного). Но тогда  $F(z_0)$  аналитична вне  $\mathcal{L}$ .

Мы доказали формулу (2) в случае  $n = 1$ . Для  $n \geq 2$  рассуждения ведутся по индукции.

**Следствие.** Если функция  $w = f(z)$  аналитическая в области  $D$ , т. е. имеет непрерывную первую производную на  $D$ , то она имеет производные всех порядков.

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  — любая точка  $D$  и  $\sigma$  — круг с центром в  $z_0$ , целиком лежащий в области  $D$ , а  $\gamma$  — окружность — граница  $\sigma$ , ориентированная против часовой стрелки. Тогда по формуле Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

т. е. функция  $f(z_0)$  изображается интегралом типа Коши при  $\mathcal{L} = \gamma$  и  $\varphi(z) = f(z)$ . Значит, в силу теоремы 1  $f(z)$  бесконечно дифференцируема и

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

## § 6.9. Степенной ряд

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < R), \quad (1)$$

имеющий радиус сходимости  $R > 0$ .

Из теории степенных рядов мы знаем, что ряд (1) равномерно сходится на круге  $|z| \leq \rho$ , где  $\rho$  — любое положительное число, меньшее  $R$  ( $\rho < R$ ). Поэтому сумма  $f(z)$  ряда (1) — непрерывная функция в открытом круге  $|z - z_0| < R$ . Больше того,  $f(z)$  имеет на этом круге непрерывную производную  $f^{(n)}(z)$  любого порядка, которую можно вычислить путем почленного дифференцирования ряда (1). Это пока-

зывает, что сумма степенного ряда есть *аналитическая функция* в круге (открытом!) его сходимости. Числа  $c_k$  вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

что показывает, что степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы. В силу равенств (3) § 6.8 эту формулу можно заменить следующей:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $L$  — произвольный контур, ориентированный против часовой стрелки, принадлежащий к кругу сходимости ряда (1) и содержащий внутри точку  $z_0$ .

Но верна также

**Теорема 1.** *Функция  $f(z)$ , аналитическая в круге  $|z - z_0| < R$ , разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням  $(z - z_0)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f(z)$  аналитическая в круге  $|z - z_0| < R$ . Обозначим через  $z$  любую точку внутри этого круга (рис. 145). Опишем положительно ориентированную окружность  $L$  с центром в точке  $z_0$  и радиуса  $\rho < R$  так, чтобы точка  $z$  оказалась внутри контура  $L$ . Тогда функция  $f(z)$  будет аналитической на контуре  $L$  и внутри него. Поэтому по теореме Коши

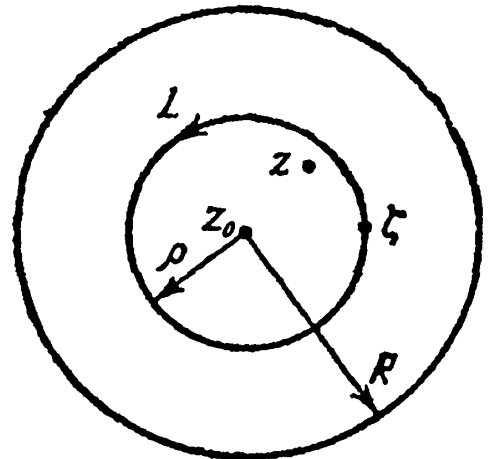


Рис. 145

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)} \quad (3)$$

Дробь  $1/(\zeta - z)$  можно представить в виде

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \quad (4)$$

Так как точка  $\zeta \in L$ , а  $z$  находится внутри этого контура, то

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1. \quad (5)$$

Поэтому  $1/\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)$  можно рассматривать как сумму сходящейся геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \dots \quad (6)$$

Из (4) и (6) получаем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \dots, \quad (7)$$

причем ряд (7) равномерно сходится при любых  $\zeta \in L$  и постоянном  $z$ , потому что, как это видно из (5), выражение  $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|$  не зависит от  $\zeta \in L$  и меньше 1.

Умножая (7) на  $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$  (не нарушая его равномерной сходимости) и интегрируя вдоль  $L$ , имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} + \dots$$

В силу (3)

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad (8)$$

где мы обозначили

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Итак, мы доказали, что аналитическая функция  $f(z)$  в круге  $|z - z_0| < R$  изображается степенным рядом (8) с коэффициентами (9), т. е. своим рядом Тейлора.

**Пример 1.** При разложении функций в ряд Тейлора можно использовать известные разложения элементарных функций. Например,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

поэтому

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

Пример 2. Функция  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$  в достаточно малой окрестности  $z = 0$  является аналитической функцией

$((\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \cos z \neq 0)$ . Поэтому данную функцию можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$ , хотя общий вид коэффициента трудно вычислить. Имеем по формуле (2):  $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 2$ , т. е.

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2z^3}{3!} + \dots$$

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора функции  $w = \operatorname{sh} z$

и  $w = \operatorname{ch} z$ . Имеем  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , поэтому

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

## § 6.10. Ряд Лорана<sup>1</sup>

**Теорема 1.** Пусть  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Всякая аналитическая в кольце

$$r < |z - z_0| < R \quad (1)$$

функция  $f(z)$  однозначно представляется в этом кольце в виде сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (2)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3)$$

<sup>1</sup> Пьер Лоран (1813–1854) – французский математик.

$\gamma$  — любая окружность  $|\zeta - z_0| = \rho$ ,  $r < \rho < R$ , ориентированная против часовой стрелки.

Ряд (2) называется рядом Лорана функции  $f(z)$  по степеням  $(z - z_0)$  или разложением Лорана функции  $f(z)$  в кольце  $r < |z - z_0| < R$ .

З а м е ч а н и е. Когда говорят, что ряд  $\sum_{-\infty}^{\infty}$  сходится, под этим подразумевается, что сходятся отдельно ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1}$$

Доказательство теоремы 1. Возьмем ориентированные против часовой стрелки окружности  $c$  и  $C$  радиусов  $r'$  и  $R'$  с центром в точке  $z_0$ , где  $r < r' < R' < R$  (рис. 146).

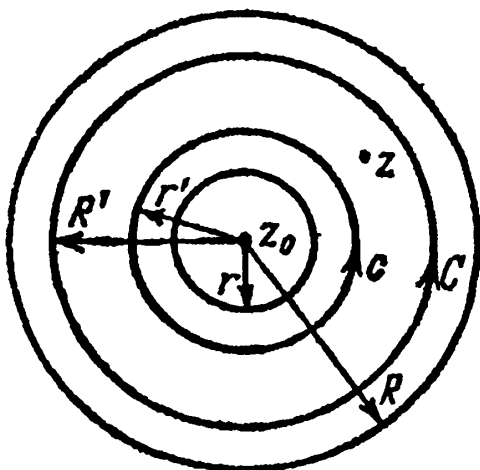


Рис. 146

В силу условия теоремы  $f(z)$  аналитична в кольце между окружностями  $c$  и  $C$  и на самих окружностях. Поэтому по формуле Коши для сложного контура имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4)$$

где  $z$  — точка между окружностями  $c$  и  $C$ .

В первом интеграле точка  $\zeta$  обозначает точку окружности  $C$ , поэтому

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R'} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left[ 1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (5)$$



причем ряд справа сходится равномерно для  $\zeta \in C$  (при фиксированном  $z$ ).

Во втором интеграле точка  $\zeta$  обозначает точку окружности  $c$ , поэтому

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{|z - z_0|} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left[ 1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right]} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (6)$$

причем ряд справа сходится равномерно для всех  $\zeta \in c$  (при фиксированном  $z$ ).

Подставляя (5) и (6) в (4) и почленно интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как функция  $f(\xi)/(\xi - z_0)^{n+1}$  при любом  $n$  аналитична в кольце, то в силу теоремы Коши интеграл (3) равен подобному интегралу по любой другой окружности, в частности по  $c$  и  $C$ . Поэтому из (7) следует (2), где числа  $c_n$  вычисляются по формулам (3).

Первый ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  в правой части (2), сходится в круге  $|z - z_0| < R$  к некоторой аналитической в этом круге функции  $f_1(z)$ . Он называется *правильной частью ряда Лорана*.

Второй ряд в правой части (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

сходится при  $|z - z_0| > r$ . Он определяет некоторую аналитическую функцию  $f_2(z)$ , называемую *главной частью ряда Лорана*.

Итак,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где  $f_1(z)$  — функция аналитическая в круге  $|z - z_0| < R$ , а  $f_2(z)$  — вне круга радиуса  $r$  с центром в точке  $z_0$  ( $|z - z_0| > r$ ). Внутри кольца  $r < |z - z_0| < R$  обе эти функции аналитичны.

Коэффициенты ряда Лорана  $c_n$  рассматриваемой функции  $f(z)$  единственны, потому что они вычисляются по формулам (3).

**Пример 1.** Функция

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

аналитична на плоскости  $z$ , за исключением точек  $z = 2$  и  $z = 3$ .

а) Функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z| < 2$ , и потому на основании теоремы 1 § 6.9 ее можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$ , сходящийся в круге  $|z| < 2$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (8)$$

Числа  $c_k$  можно вычислить по формуле

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Однако в данном случае ряд (8) можно также получить, применив формулу для суммы членов убывающей геометрической прогрессии. Имеем (если  $|z| < 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Поэтому для нашей функции  $c_k = \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}$ .

В силу единственности разложения функции в степенной ряд полученные числа  $c_k$  равны соответственно числам  $c_k$ , вычисляемым по формуле (9).

б) Функция  $f(z)$  аналитична в кольце  $2 < |z| < 3$ . Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (10)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{k+1}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (11)$$

где  $\gamma$  — окружность  $|\zeta| = \rho$ ,  $2 < \rho < 3$ , ориентированная против часовой стрелки. Но числа  $c_k$  можно получить, не прибегая к сложным формулам (11). Имеем для  $2 < |z| < 3$

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Поэтому ряд Лорана функции  $f(z)$  целый вид

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}.$$

Вследствие единственности разложения в ряд Лорана полученные коэффициенты равны соответственно числам  $c_k$ , определяемым по формулам (11).

в) Функция  $f(z)$  аналитична также во внешности круга  $|z| \leq 3$ , т. е. для значений  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z| > 3$  и обладает свойством

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0. \quad (12)$$

Поэтому  $f(z)$  можно разложить в ряд Лорана вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}. \quad (13)$$

Члены вида  $c_k z^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) не могут входить в разложение Лорана функции  $f$ , т. е.  $c_k = 0$  для указанных  $k$ . Иначе это противоречило бы свойству (12).

Числа  $c_{-k}$  здесь тоже можно получить непосредственно. Имеем для  $|z| > 3$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \dots \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{z^k},$$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Поэтому

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} - 2^{k-1}}{z^k}.$$

**Пример 2.** Надо разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} \quad (14)$$

в ряд Тейлора по степеням  $z - i$  и определить радиус сходимости этого ряда.

**Решение.** Наибольший круг с центром в точке  $i$ , внутри которого функция  $f(z)$  аналитическая, имеет радиус, равный расстоянию от точки  $i$  до ее ближайшей особой точки. Таковой является, очевидно, точка  $z = 2$ . Следовательно, указанный радиус равен

$$R = |2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Обозначим через  $\sigma$  открытый круг (без границы) с центром в точке  $i$  радиуса  $R = \sqrt{5}$ .

Внутри круга  $\sigma$  функция  $f(z)$  аналитическая, а любой концентрический ему круг большего радиуса содержит в себе особую точку  $z = 2$ , в которой аналитичность нарушается.

На основании теоремы 1 § 6.9 функция  $f(z)$  разлагается в ряд Тейлора по степеням  $z - i$ . Этот ряд легко получить эффективно.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-i)+(i-2)} = \frac{1}{\frac{z-i}{i-2} + 1} \frac{1}{i-2} = \\ &= \frac{1}{i-2} \left( 1 - \frac{z-i}{i-2} + \left( \frac{z-i}{i-2} \right)^2 - \dots \right), \end{aligned} \quad (15)$$

и мы получили степенной ряд по степеням  $z - i$ , сходящийся, очевидно, в круге  $|z - i| < R$ ,  $R = |i - 2| = \sqrt{5}$ .

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-i)+(i-3)} = \frac{1}{i-3} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i-3}} = \\ &= \frac{1}{i-3} \left( 1 - \frac{z-i}{i-3} + \left( \frac{z-i}{i-3} \right)^2 - \dots \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Снова получен степенной ряд по степеням  $z - i$ , тоже сходящийся в круге  $|z - i| < R$ . На самом деле он сходится в круге радиуса  $|i - 3| = \sqrt{10}$ , но это нам не понадобится.

Разность рядов (16) и (15) есть разложение в ряд Тейлора по степеням  $z - i$  функции  $f(z)$ . Радиус сходимости этого ряда равен  $R = \sqrt{5}$ .

**Задача.** Разложить функцию  $f(z)$  (см. (14)) в ряд Лорана по степеням  $z - i$ : а) в кольце  $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$  и б) в окрестности  $z = \infty$ .

### § 6.11. Классификация изолированных особых точек. Вычеты

В § 6.10 была доказана теорема 1, утверждающая, что если  $0 \leq r < R \leq \infty$  и функция  $f(z)$  аналитична в кольце

$$r < |z - z_0| < R,$$

то она разлагается в сходящийся к ней ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = f_1(z) + f_2(z) \quad (r < |z - z_0| < R), \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k && (|z - z_0| < R), \\ f_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} && (|z - z_0| > r). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть  $r = 0$ . Предполагается, таким образом, что функция аналитична в открытом круге  $0 < |z - z_0| < R$ , из которого выколота точка  $z_0$ . В самой точке  $z_0$  функция  $f$  чаще всего бывает не определена.

Говорят в этом случае, что  $z_0$  есть *изолированная особая точка* функции  $f$ . Ниже будет дана классификация изолированных особых точек.

Степенной ряд

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < R)$$

имеет радиус сходимости  $R > 0$ . Поэтому его сумма имеет непрерывную производную в круге  $|z - z_0| < R$ .

Рассмотрим три случая (при  $r = 0$ !).

С л у ч а й а). Функция  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (3)$$

т. е. все числа  $c_{-k} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Так как степенной ряд (3) сходится для всех  $z$  с  $|z - z_0| < R$ , то его радиус сходимости равен  $R$  и, следовательно (см. § 6.9), его сумма  $f_1(z)$  определена и непрерывно дифференцируема во всех точках круга  $|z - z_0| < R$ , в том числе и в точке  $z_0$ . Таким образом, функция  $f_1(z)$  аналитична в этом круге.

Поэтому, если принять, что

$$f(z_0) = f_1(z_0) = c_0,$$

то и функция  $f(z)$  будет аналитической в этом круге.

В этом случае говорят, что *особенность у функции  $f$  в точке  $z_0$  устранима*. Достаточно положить  $f(z_0) = c_0$ , как функция  $f$  станет аналитической не только поблизости от точки  $z_0$ , но и в самой точке.

Заметим, что в данном случае интеграл

$$\int_L f(z) dz = 0 \quad (4)$$

для любого замкнутого контура  $L$ , содержащего внутри точку  $z_0$  и принадлежащего к кругу  $|z - z_0| < R$ .

Случай б). Функция  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_{-m} \neq 0). \quad (5)$$

Таким образом,  $c_k = 0$  для  $k = -(m + 1), -(m + 2), \dots$

В этом случае говорят, что точка  $z_0$  есть полюс функции  $f(z)$  порядка (кратности)  $m$ . При  $m = 1$  точку  $z_0$  называют еще простым полюсом.

Так как

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c_0$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)^m} [c_{-m} + c_{-(m-1)}(z - z_0) + \dots + \\ &+ c_{-1}(z - z_0)^{m-1}] = \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty. \quad (7)$$

Теперь, если  $L$  — контур, ориентированный против часовой стрелки, содержащий внутри  $z_0$  и принадлежащий к кругу  $|z - z_0| < R$ , то

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (8)$$

В самом деле,

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_1(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_L \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} dz = 0 + 2\pi i c_{-1},$$

потому что

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int_L \frac{dz}{(z - z_0)^k} = 0 \quad (k = 2, \dots, m)$$

(см. (10), (11) § 6.6).

Случай в). Функция  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = f_1(z) + f_2(z), \quad (9)$$

где в ряду

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

не равно нулю бесконечное число коэффициентов  $c_{-k}$ .

В этом случае говорят, что *функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  существенную особенность.*

Мы знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c_0.$$

Однако  $f_2(z)$  при указанных условиях не стремится при  $z \rightarrow z_0$  к какому-нибудь пределу — конечному или бесконечному. Этот факт мы не имеем возможности здесь доказать и скажем только, что он вытекает из известной теоремы Сохоцкого<sup>1</sup>.

Заметим, что рассуждения, которые приводились при доказательстве равенства (6) в случае полюса, в данном случае неприменимы, потому что для бесконечных сумм операция почленного предельного перехода не всегда законна.

**Пример 1.** Функция  $e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$  имеет существенную особенность в точке  $z = 0$ . Эта функция не имеет предела в точке  $z = 0$ .

В самом деле, при  $z = x$  ( $x$  — действительное)  $\exp(-1/x^2) \rightarrow 0$ , когда  $x \rightarrow 0$ . Однако если  $z = \frac{i}{n}$ , то  $\exp(-1/z^2) = \exp(n^2) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Значит, предел в точке  $z = 0$  у функции  $\exp(-1/z^2)$  не существует.

Для любого ориентированного против часовой стрелки контура  $L$ , принадлежащего к кругу  $|z - z_0| < R$  и содержащего внутри точку  $z_0$ , так же как в случае полюса

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (10)$$

<sup>1</sup> Ю. В. Сохоцкий (1842–1929) — русский советский математик.



Дело в том, что интеграл по  $L$  в данном случае (см. замечание 2 § 6.6) можно заменить на интеграл по какой-либо ориентированной против часовой стрелки окружности  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ , принадлежащей к кругу  $|z - z_0| < R$ . Но на  $\gamma$  ряды (9) равномерно сходятся и, следовательно, их можно почленно проинтегрировать по  $\gamma$ . Однако, как мы знаем,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = 0 \quad (k \neq 1) \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

откуда следует равенство (10).

Сделаем теперь определение: пусть  $z_0$  есть изолированная точка функции  $f(z)$ , т. е. пусть функция  $f(z)$  аналитическая в некотором круге

$$|z - z_0| < R,$$

из которого выколота точка  $z_0$ . Вычетом функции  $f$  в точке  $z_0$  называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz = \underset{z=z_0}{\text{Выч}} f(z). \quad (11)$$

где  $L$  — контур в круге  $|z - z_0| < R$ , ориентированный против часовой стрелки и содержащий в себе точку  $z_0$ .

На основании сказанного выше (см. случаи а), б), в)), если

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

есть ряд Лорана  $f$  в точке  $z_0$ , то

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}} f(z) = c_{-1}. \quad (12)$$

Поэтому, если известно разложение функции в ряд Лорана по степеням  $z - z_0$ , то вычет в точке  $z_0$  легко находится.

В частности, если  $z_0$  — устранимая особая точка, то

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}} f(z) = 0.$$

Иногда разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана трудно, и поэтому приходится искать другие способы вычисления вычета, не разлагая функцию в ряд Лорана.

Пусть  $z = z_0$  — полюс порядка  $m \geq 1$ . Тогда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^m c_{-k} (z - z_0)^{-k} \quad (c_{-m} \neq 0). \quad (13)$$

Умножая левую и правую части (13) на  $(z - z_0)^m$ , имеем

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots \\ \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m}. \quad (14)$$

Если продифференцировать равенство (14)  $(m - 1)$  раз, то свободный член справа будет равен  $(m - 1)!c_{-1}$  и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right]}{dz^{m-1}} = (m - 1)!c_{-1},$$

откуда

$$\text{Выч } f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right]}{dz^{m-1}}. \quad (15)$$

Если функция  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z_0) \neq 0$ , а  $\psi(z)$  имеет простой нуль при  $z = z_0$  ( $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ ), то  $z = z_0$  является простым полюсом  $f(z)$ . На основании формулы (15) (при  $m = 1$ ) имеем

$$\text{Выч } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \\ = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Таким образом, в данном случае

$$\text{Выч } f(z) = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad (16)$$

В случае, когда  $z = z_0$  — существенно особая точка, у нас имеется только один способ вычисления вычета — разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана.

**Пример 2.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}$  в точке  $z = \frac{\pi}{2}$ .

В данном случае  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z) = \sin^2 z$ ,  $\psi(z) = \cos z$ . Точка  $z = \pi/2$  является простым полюсом функции  $f(z)$ , так как  $\varphi(\pi/2) = 1 \neq 0$ ,  $\psi(\pi/2) = 0$ ,  $\psi'(z) = -\sin z$ ,  $\psi'(\pi/2) = -1 \neq 0$ . Значит, по формуле (16) получаем

$$\text{Выч}_{z=\pi/2} f(z) = \frac{\varphi(\pi/2)}{\psi'(\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

**Пример 3.** Найти вычет функции  $\exp(1/z)$  в точке  $z = 0$ .

Имеем

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Таким образом, точка  $z = 0$  является существенно особой и

$$\text{Выч}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = 1.$$

**Пример 4.** Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$$

относительно точки  $z = 2$ .

Данная точка является полюсом второго порядка, поэтому по формуле (15) имеем

$$\begin{aligned} \text{Выч}_{z=2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} [(z-2)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{(z-3)^2} = -1. \end{aligned}$$

## § 6.12. Классификация особых точек на бесконечности

Предположим теперь, что в теореме 1 § 6.10  $z_0 = 0$  и  $R = \infty$ , а  $r$  — любое неотрицательное число ( $0 \leq r < \infty$ ). Тогда теорема 1 гласит: если функция  $f(z)$  аналитическая для всех комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z| > r, \quad (1)$$

то ее можно разложить в ряд Лорана по степеням  $z$ :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = F_1(z) + F_2(z) \quad (|z| > r), \quad (2)$$

сходящийся для всех  $z$  с  $|z| > r$ . Здесь

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}, \quad F_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \quad (3)$$

Множество (1) называют *внешностью круга*  $|z| \leq r$ . Удобно считать, что это множество есть *окрестность бесконечно удаленной точки* (точки  $\infty$ ).

Таким образом, мы формально добавляем к множеству комплексных точек (чисел) еще абстрактную бесконечно удаленную точку ( $z = \infty$ ).

Функция  $f(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = \infty$ , исключая саму точку  $\infty$ , которую естественно в данном случае называть *изолированной особой точкой функции*  $f$ .

В зависимости от поведения функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  естественно ввести следующую классификацию:

а) *Особенность в точке  $z = \infty$  устранимая, если*

$$c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

т. е. если

$$f(z) = F_1(z) \quad (|z| > r).$$

В этом случае

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(z) = c_0.$$

Очевидно также

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z) dz = -c_{-1}.$$

где  $L_-$  — произвольный контур, ориентированный по часовой стрелке, содержащий внутри себя окружность  $|z| = r$

(рис. 147). При известном воображении можно считать, что точка  $\infty$  находится внутри контура  $L_-$ , — если двигаться по контуру  $L_-$  по часовой стрелке, то точка  $\infty$  остается слева.

б) Точка  $z = \infty$  есть полюс порядка  $m$ , если

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^m c_k z^k \quad (c_m \neq 0).$$

В этом случае, очевидно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty. \text{ Далее}$$

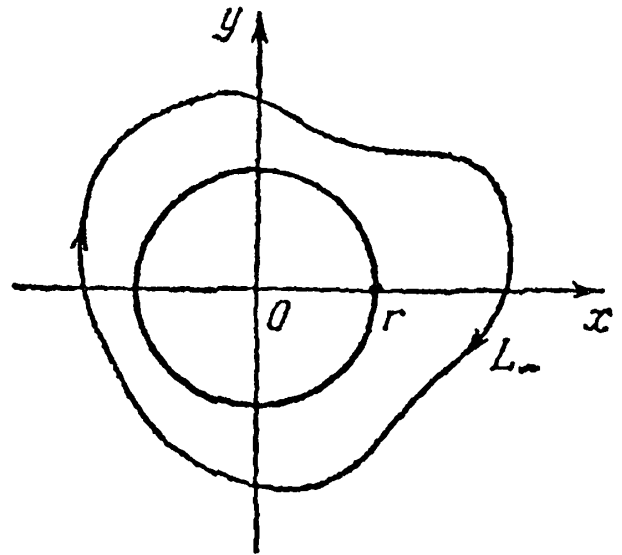


Рис. 147

$$\begin{aligned} \int_{L_-} f(z) dz &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} \int_{L_-} \frac{dz}{z^k} + \sum_{k=1}^m c_k \int_{L_-} z^k dz = \\ &= -c_{-1} \int_L \frac{dz}{z} = -2\pi i c_{-1}, \end{aligned}$$

потому что

$$\int_{L_-} z^k dz = - \int_L z^k dz = 0 \quad (k \neq -1).$$

в) Точка  $z = \infty$  есть существенно особая точка, если

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (4)$$

и имеется бесконечное множество чисел  $c_k$ , не равных нулю.

Функция  $F_1(z)$  стремится к конечному пределу при  $z \rightarrow \infty$

в то время как функция  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ , на основании теоремы

Сохотского, не стремится ни к какому пределу при  $z \rightarrow \infty$ . Поэтому и функция  $f(z)$  не стремится к пределу при  $z \rightarrow \infty$ .

Далее

$$\int_{L_-} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{L_-} z^k dz = -2\pi i c_{-1}.$$

Почленное интегрирование здесь законно, потому что, как мы знаем, интегралы  $\int_{L_-}$  можно заменить на интег-

ралы  $\int_C$  по окружности радиуса  $\rho > r$ , на которой ряд (4)

равномерно сходится.

Введем определение.

*Вычетом функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке называется*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z) dz = \text{Выч}_{z=\infty} f(z),$$

где  $L_-$  есть произвольный замкнутый контур, ориентированный по часовой стрелке, принадлежащий к множеству  $|z| > r$  (где функция  $f(z)$  аналитична!). В данном случае говорят, что при движении по контуру по часовой стрелке «точка  $\infty$  остается слева».

На основании сказанного (см. а), б), в)), если

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| > r),$$

ряд Лорана функции  $f$  во внешности окружности  $|z| = r$ , то

$$\text{Выч}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Если  $z = \infty$  — устранимая особая точка, то в ряде Лорана функции  $f(z)$  отсутствуют положительные степени  $z$ , а  $z^{-1}$  может присутствовать, поэтому  $\text{Выч}_{z=\infty} f(z)$  в этом случае не обязательно равен нулю.

**Пример.** Функция

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-1-2n} (|z| > 1)$$

имеет устранимую особенность в точке  $z = \infty$  и  $c_{-1} = 1$ , значит,

$$\text{Выч}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

### § 6.13. Теорема о вычетах

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитическая на всей плоскости  $z$ , за исключением конечного числа точек  $z_1, \dots, z_N$ . Тогда имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^N \text{Выч}_{z=z_k} f(z) + \text{Выч}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{1}$$

**Доказательство.** Построим окружности  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ , ориентированные по часовой стрелке, с центрами соответственно  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , настолько малого радиуса, чтобы они не пересекались.

Кроме того, построим окружность  $\Gamma$ , ориентированную против часовой стрелки, с центром в нулевой точке, настолько большого радиуса, чтобы окружности  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  оказались внутри  $\Gamma$  (рис. 148). Сложный контур  $L = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N + \Gamma$  ограничивает область  $\Omega$ , внутри которой функция  $f(z)$  аналитическая. Она аналитическая также на  $L$ . При этом при обходе по  $L$  область  $\Omega$  остается слева.

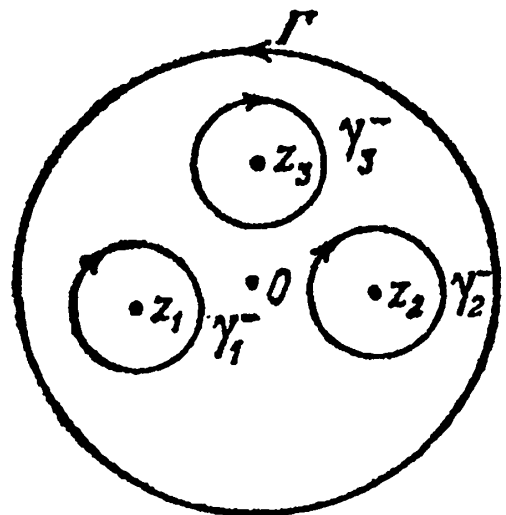


Рис. 148

Но тогда на основании теоремы Коши для сложного контура

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_N} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \tag{2}$$

или, если помножить левую часть на  $-1/2\pi i$ , то получим ( $\gamma_i, \Gamma$  ориентирована противоположно  $\gamma_i, \Gamma$ ):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

т. е.

$$\text{Выч}_{z=z_1} f(z) + \dots + \text{Выч}_{z=z_N} f(z) + \text{Выч}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Надо учесть, что внутри каждого из контуров  $\gamma_k$  имеется только одна особая точка  $z_k$ , а вне  $\Gamma$  — только одна особая точка  $z = \infty$ . Теорема доказана.

Применение этой теоремы сводится к следующему. Если затруднительно вычислить один из интегралов, входящих в (2), то можно попытаться вычислить оставшиеся интегралы, входящие в (2), и получить искомый интеграл из (2).

Само вычисление этих интегралов сводится к разложению функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности соответствующих особых точек. В сущности и эти разложения не надо знать полностью. Достаточно только знать члены вида  $c_{-1}/(z - z_k)$  этих разложений, чтобы прийти к цели.

## § 6.14. Вычисление интегралов при помощи вычетов

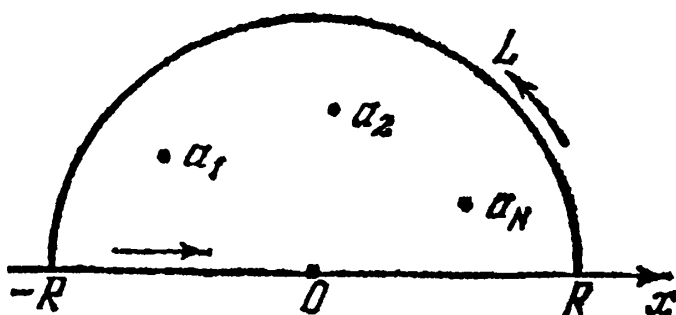


Рис. 149

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , лежащих в верхней полуплоскости. При этих условиях мы рассмотрим способы вычисления интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx} dx.$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(z)$  удовлетворяет перечисленным выше условиям и, кроме того,  $|f(z)| \leq M/|z|^m$  при  $|z| \geq R$ , где  $m \geq 2$  и  $R$  — достаточно большое число. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Выч}_{z=a_j} f(z). \quad (1)$$

**Доказательство.** Опишем полуокружность  $L$  (ориентированную против часовой стрелки) радиуса  $R$  с цент-



ром в точке  $O$  так, чтобы все особые точки функции  $f(z)$  попали внутрь  $L$  (рис. 149). В силу теоремы 1 § 6.13

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Выч}_{z=a_j} f(z). \quad (2)$$

Так как  $|f(z)| \leq M/|z|^m$  при  $|z| \geq R$ , то

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^m} \pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (m - 1 \geq 1).$$

Переходя к пределу в равенстве (2) при  $R \rightarrow \infty$ , получим (1).

Пример 1. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ .

Функция  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  аналитична в верхней полуплоскости, за исключением точек

$$a_1 = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad a_2 = e^{3\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1),$$

в которых она имеет простые полюсы. Кроме того,  $|f(z)| \leq 1/|z|^4$  ( $m = 4 > 2$ ). Найдем вычеты функции  $f(z)$  в точках  $a_1, a_2$ . По формуле (16) § 6.11

$$\text{Выч}_{z=a_j} f(z) = \frac{1}{\psi'(a_j)} \quad (j = 1, 2),$$

где  $\psi(z) = 1 + z^4$ . Имеем  $\psi'(z) = 4z^3$ ,  $\psi'(a_1) = 4e^{3\pi i/4} = -4e^{i\pi/4} \neq 0$ ,  $\psi'(a_2) = 4e^{9\pi i/4} = 4e^{i\pi/4} \neq 0$ . Отсюда

$$\text{Выч}_{z=a_1} f(z) = -\frac{1}{4} e^{i\pi/4}, \quad \text{Выч}_{z=a_2} f(z) = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}.$$

По формуле (1) получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{2\pi i}{4} (-e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \pi \frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i} = \\ &= \pi \sin \frac{\pi}{4} = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям, отмеченным в начале параграфа и  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  равномерно относительно  $\arg z = \varphi$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Выч}_{z=a_j} f(z) e^{iz}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Так же как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_L f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Выч}_{z=a_j} f(z) e^{iz} \quad (4)$$

(функция  $f(z)e^{iz}$  имеет те же особенности, что и  $f(z)$ ).

Нам нужно доказать, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл

$\int_L f(z) e^{iz} dz$  стремится к нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left| \int_L f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{-R \sin \varphi} e^{iR \cos \varphi} i Re^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})| e^{-R \sin \varphi} R d\varphi. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы  $|f(Re^{i\varphi})| \leq \varepsilon$  при  $R > N_1$  для всех  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) и достаточно большого  $N_1$ . Поэтому ( $\sin \varphi > 2\varphi/\pi$  при  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq \varepsilon \int_0^\pi R e^{-R \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} R e^{-R \sin \varphi} d\varphi \leq 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} R e^{-2R\varphi/\pi} d\varphi = \\ &= \left[ \left( \frac{2R}{\pi} \varphi \right) = t \right] = \varepsilon \pi \int_0^R e^{-t} dt = \pi \varepsilon (1 - e^{-R}) < \pi \varepsilon \quad (R > N_1). \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (4), при  $R \rightarrow \infty$  получаем (3).

Если функция  $f(z)$  имеет особенности на действительной оси, то специальным построением контура интегриро-

вания можно вычислить соответствующие интегралы, если они существуют.

Пример 2. Пусть  $f(z) = 1/z$ . Эта функция имеет простой полюс на действительной оси в точке  $z = 0$ . Далее,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$

равномерно относительно  $\arg z = \varphi$ .

Построим контур интегрирования, как на рис. 150. Обход контура осуществляется по стрелкам, указанным на этом рисунке. В заштрихованной части функция  $e^{iz}/z$  аналитическая при любом  $R$  и любом  $\varepsilon$ , поэтому по теореме Коши (полуокружность  $\gamma$  ориентирована против часовой стрелки)

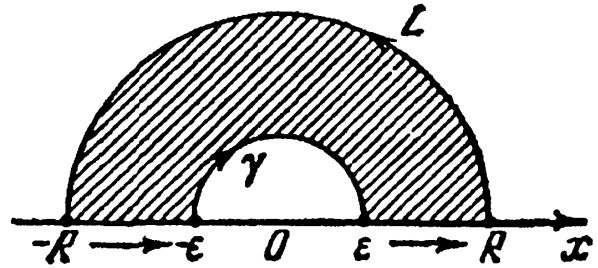


Рис. 150

$$\left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_L \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (5)$$

Как и выше, легко показать, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L z^{-1} e^{iz} dz = 0$ .

Далее

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} e^{iz} \frac{dz}{z} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = i \int_0^{\pi} d\varphi = \pi i. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5) в пределе, при  $R \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ , принимает вид

$$\begin{aligned} \pi i &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2xi} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Так как функция  $\frac{\sin x}{x}$  четная, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

**З а м е ч а н и е.** Если под знаком интеграла есть сомножитель  $\sin x$  или  $\cos x$ , то часто удобно рассматривать интеграл от функции, где  $\sin x$  или  $\cos x$  заменены на  $e^{iz}$ . Это объясняется тем, что  $|\sin z|$  и  $|\cos z|$  неограниченно возрастают при  $z \rightarrow \infty$ , а  $|e^{iz}| = e^{-y} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$  ( $y > 0$ ). Поэтому

поведение функции  $f(z) \begin{cases} \sin z \\ \cos z \end{cases}$  будет другое, чем у функ-

ции  $f(z)e^{iz}$ . Затем, получив значение интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ ,

выделяя действительную и мнимую части, мы найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx.$$

**П р и м е р 3.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x dx}{a^2 + x^2} \quad (\alpha, a > 0).$$

Рассмотрим функцию  $e^{i\alpha z}/(a^2 + z^2)$ . Эта функция аналитична в верхней полуплоскости, кроме точки  $z = ai$ . Функция  $f(z) = 1/(a^2 + z^2) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg z = \varphi$ . Поэтому по теореме 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ai} \frac{e^{i\alpha z}}{a^2 + z^2} = 2\pi i \frac{e^{i\alpha ai}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}.$$

Выделяя действительную часть, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\alpha a}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}).$$

Пример 5.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x dx}{1+x^2} &= \int_0^{\infty} \frac{1 - \sin^2 x}{1+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}) = \frac{\pi}{4} (1 + e^{-2}). \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить интегралы Френеля<sup>1</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx.$$

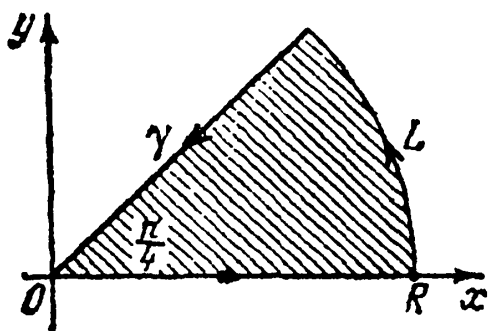


Рис. 151

Рассмотрим функцию  $e^{iz^2}$ . Эта функция в заштрихованной области (рис. 151) аналитическая, поэтому по теореме Коши

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_L e^{iz^2} dz + \int_\gamma e^{iz^2} dz = 0,$$

где  $L$  — часть окружности  $|z| = R$ ,  $\gamma$  — отрезок прямой  $z = \rho e^{i\pi/4}$ ,

$0 \leq \rho \leq R$  (ориентированные по стрелкам). Далее

<sup>1</sup> О. Ж. Френель (1788–1827) — французский физик

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{i\rho^2 i} e^{i\pi/4} d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho \rightarrow$$

$$\rightarrow -e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho;$$

$$\left| \int_L e^{iz^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{i\varphi})^2} Rie^{i\varphi} d\varphi \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi/4} Rie^{i\varphi} e^{iR^2 \cos 2\varphi} e^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{4\varphi}{\pi}} d\varphi \leq \frac{c}{R} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$$

Итак, в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получаем (см. пример 3 § 2.13)

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{4}}. \text{ Выделяя действительную и мнимую части, получаем}$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4}},$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

## § 6.15. Линейная функция. Дробно-линейная функция

Целая линейная функция. Рассмотрим три функции

$$w = z + c, \quad (1)$$

$$w = rz, \quad (2)$$

$$w = e^{i\theta}z, \quad (3)$$

где  $c$  — постоянное комплексное число,  $r > 0$ ,  $\theta$  — произвольное действительное число.

Все три функции (1), (2), (3) отображают плоскость  $z$  на всю плоскость  $w$ .

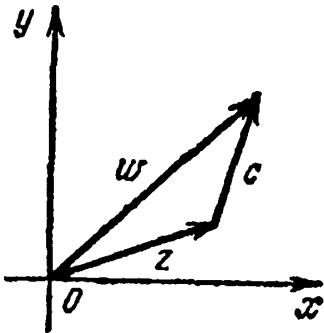


Рис. 152

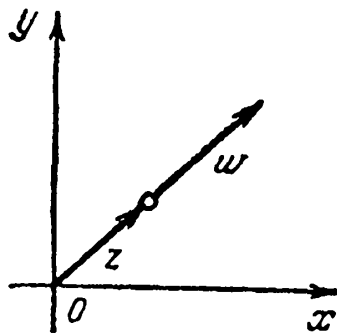


Рис. 153

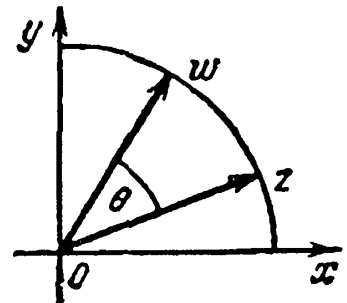


Рис. 154

Функция (1) осуществляет сдвиг плоскости  $z$  на вектор  $c$  (рис. 152).

Функция (2) ( $r > 0$ ) осуществляет растяжение (при  $r > 1$ ) и сжатие (при  $r < 1$ ) плоскости  $z$  в  $r$  раз:  $|w| = r|z|$ ,  $\text{Arg}w = \text{Arg}z$ . На рис. 153 показан случай  $r > 1$ .

Функция (3) осуществляет поворот плоскости  $z$  вокруг нулевой точки на угол  $\theta$  (рис. 154).

Функции (1), (2), (3) имеют соответственно производные

$$w' = 1, \quad w' = r, \quad w' = e^{i\theta},$$

не равные нулю и потому они осуществляют конформные отображения.

Все эти три функции являются частными случаями более общей *целой линейной функции*

$$w = az + b \quad (a \neq 0), \quad (4)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные комплексные числа.

Осуществляемое ею отображение можно записать в виде

$$w = a(z + c) = re^{i\theta}(z + c),$$

где  $c = b/a$ ,  $a = re^{i\theta}$ .

Отсюда следует, что она сводится к (1), (2), (3):

$$w = ru, \quad u = e^{i\theta}v, \quad v = z + c.$$

Иначе говоря, преобразование плоскости  $z$ , осуществляемое функцией (4), сводится к переносу (на вектор  $c$ ), затем к повороту плоскости (на угол  $\theta$ ) и затем к растяжению или сжатию плоскости в  $r$  раз.

Функция  $w = \frac{1}{z}$ . Полагая  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ , имеем

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi, \quad (5)$$

где второе равенство надо понимать с точностью до  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Отсюда видно, что окружность  $|z| = 1$  переходит в себя, точнее каждая ее точка переходит в точку, симметричную относительно действительной оси.

Отметим, что если окружность  $|z| = 1$  проходится в направлении против часовой стрелки, то отображенная окружность  $|w| = 1$  проходится по часовой стрелке.

Преобразование (5) удобно разбить на два преобразования:

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi; \quad (6)$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \quad (7)$$

Преобразование (6) называется *инверсией* относительно единичной окружности.

При инверсии относительно единичной окружности точки  $z$  и  $z'$ , лежащие на луче, составляющем угол  $\varphi$  с осью  $x$ , переходят в точки, лежащие на этом же луче, и притом так, что

$$rr' = 1.$$

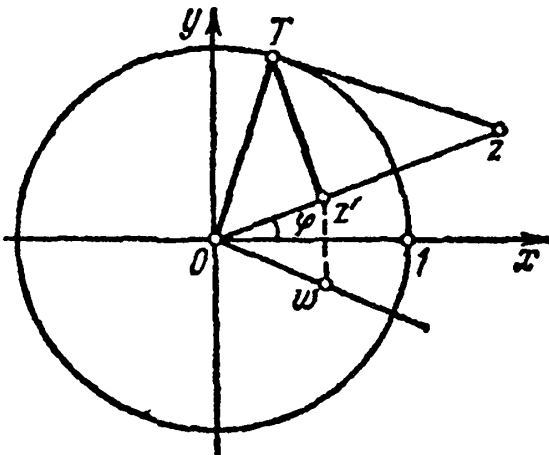


Рис. 155

Построение точки  $z' = r'e^{i\varphi}$  по известной точке  $z = re^{i\varphi}$  видно из рис. 155, где рассмотрен случай, когда  $z$  лежит вне окружности  $|z| = 1$ . Из точки  $z$  проводим касательную к окружности  $|z| = 1$ ,  $T$  — точка касания,  $Tz' \perp Oz$ . Из подобия треугольников ( $\triangle OTz'$  и  $\triangle OTz$ )



$$\frac{OT}{r'} = \frac{r}{OT}, \quad OT = 1, \quad rr' = 1.$$

Если точка  $z$  находится внутри окружности  $|z| = 1$ , то восстанавливаем из нее перпендикуляр к  $Oz$  до пересечения с окружностью в точке  $T$ . Через последнюю проводим касательную к окружности до пересечения с лучом  $Oz$ . Точка пересечения и будет точкой  $z'$ .

Точки  $z$  и  $z'$  называют взаимно симметричными относительно окружности  $|z| = 1$ .

Отображая теперь (по (7)) точку  $z'$  зеркально относительно действительной оси, мы получаем точку

$$w = r'e^{-i\varphi} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}.$$

Из формулы  $w = 1/z$  видно, что при  $z \rightarrow 0$  точка  $w$  имеет неограниченно возрастающий модуль, поэтому удобно считать, что при помощи этой формулы точке  $z = 0$  соответствует «бесконечно удаленная точка», которую обозначают символом  $w = \infty$ .

Итак, функция  $w = 1/z$  отображает плоскость  $z$  на плоскость  $w$  при помощи преобразования инверсии относительно окружности  $|z| = 1$  и зеркального отображения относительно оси  $x$ . При этом точка  $z = 0$  переходит в точку  $w = \infty$ , а точка  $z = \infty$  — в точку  $w = 0$ .

Далее  $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$  при любых  $z$  с  $|z| > 0$ , поэтому отобра-

жение с помощью функции  $w = \frac{1}{z}$  ( $|z| > 0$ ) конформно.

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (8)$$

Будем считать, что  $ad - bc \neq 0$ . Очевидно, что точка  $z = -d/c$  ( $c \neq 0$ ) переходит в точку  $w = \infty$ .

Функцию  $w$ , выделяя ее целую часть, можно представить в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}, \quad (9)$$

откуда видно, что

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad (cz + d \neq 0),$$

т. е. отображение с помощью функции (8) конформно.

Из равенства (9) видно, что данное отображение состоит из рассмотренных выше отображений:

$$z' = cz + d, z'' = \frac{1}{z'}, w = Az'' + B.$$

Если считать прямую линию за окружность бесконечного радиуса, то при преобразовании (9) окружность переходит в окружность (*круговое свойство*).

Из геометрических соображений ясно, что при параллельном переносе, растяжении и вращении окружность переходит в окружность. Больше того, внутренность отображаемой окружности переходит на внутренность отображенной окружности. Поэтому достаточно проверить

круговое свойство для преобразования  $w = \frac{1}{z}$ . Уравнение окружности в плоскости  $xOy$ , как нам известно, имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0$$

или

$$Az \cdot \bar{z} + m \frac{z + \bar{z}}{2} + n \frac{z - \bar{z}}{2i} + l = 0 \quad (z = x + iy, \bar{z} = x - iy)$$

или

$$A\bar{z}z + \bar{B}z + B\bar{z} + l = 0 \quad \left( B = \frac{m + in}{2} \right). \quad (10)$$

В рассматриваемом случае  $z = 1/w$ ,  $\bar{z} = 1/\bar{w}$ . Следовательно, уравнение (10) переходит в уравнение

$$A \frac{1}{w\bar{w}} + \frac{\bar{B}}{w} + \frac{B}{\bar{w}} + l = 0$$

или в уравнение

$$A + \bar{B}\bar{w} + Bw + lw\bar{w} = 0,$$

которое описывает некоторую окружность в плоскости  $w$ .

В частности, при  $l = 0$  получаем прямую линию, т. е. окружность, проходящая через начало координат в плоскости  $z$ , переходит в прямую в плоскости  $w$ .

Отметим, что отображение с помощью функции (9) может переводить внутренность отображаемой окружности как на внутренность, так и на внешность отображенной окружности.

Функция (9) в принципе зависит от трех параметров, за которые можно взять отношение чисел  $a, b, c, d$  к одному из них (не равному 0).

Поэтому, чтобы определить преобразование (9), надо задать три условия. Обычно задают три пары соответствующих точек:

$$w_k = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz_k + d)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Легко подсчитать, что

$$w - w_k = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)}, \quad w_k - w_j = \frac{(ad - bc)(z_k - z_j)}{(cz_k + d)(cz_j + d)}.$$

Отсюда

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (11)$$

Это и есть преобразование (9), переводящее точки  $z$  в  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Пусть заданы две окружности  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  соответственно в плоскостях  $z$  и  $w$ . Требуется найти дробно-линейное отображение, переводящее  $\Gamma$  на  $\Gamma'$  и внутренность  $\Gamma$  на внутренность  $\Gamma'$ .

На  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  соответственно зададим произвольные тройки точек  $\{z_1, z_2, z_3\}$  и  $\{w_1, w_2, w_3\}$ , следующие в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Тогда преобразование (11) и будет решением поставленной задачи.

В самом деле, оно отображает точки  $z_k$  соответственно в точки  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и, очевидно, окружность  $\Gamma$  на  $\Gamma'$  (в силу кругового свойства).

Тот факт, что в данном случае внутренность  $\Gamma$  переходит на внутренность  $\Gamma'$ , следует из конформности отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.

В данном случае окружности  $\Gamma, \Gamma'$  имеют положительную ориентацию (проходятся против часовой стрелки). В силу конформности отображения внутренняя нормаль к  $\Gamma$  (например, в точке  $z_1$ ) переходит в дугу окружности (перпендикулярной  $\Gamma'$  в точке  $w_1$ ), которая находится внутри  $\Gamma'$ , а это и обеспечивает отображение внутренности  $\Gamma$  на внутренность  $\Gamma'$ .

Если же нужно найти дробно-линейное преобразование, отображающее  $\Gamma$  на  $\Gamma'$  и внутренность  $\Gamma$  на внешность  $\Gamma'$ , то в формуле (11) надо взять точки  $\{z_1, z_2, z_3\}$  на  $\Gamma$ ,

расположенные в положительном направлении, а точки  $\{w_1, w_2, w_3\}$  на  $\Gamma'$  – в отрицательном направлении.

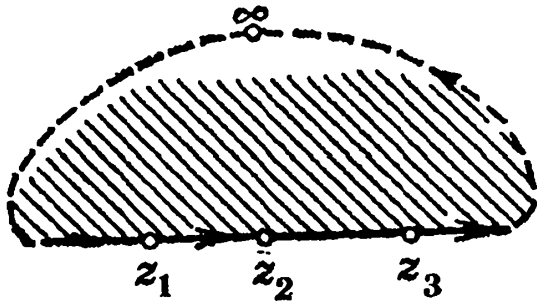


Рис. 156

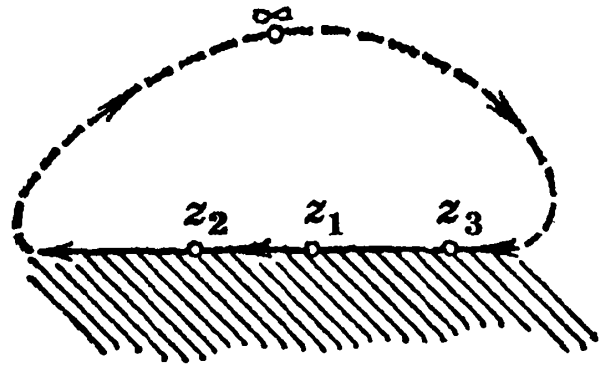


Рис. 157

Эти выводы распространяются и на случай, когда либо  $\Gamma$ , либо  $\Gamma'$ , либо и  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  являются прямыми. Однако требует пояснения, что надо понимать под внутренностью прямой  $\Gamma$ , когда на ней отмечены точки  $\{z_1, z_2, z_3\}$ .

В случае рис. 156 это есть верхняя полуплоскость, а в случае рис. 157 – нижняя полуплоскость.

Если прямую  $\Gamma$  дополнить точкой  $\infty$ , то ее можно мыслить как непрерывную окружность (см. рис. 156, 157) бесконечного радиуса.

Будем двигаться по  $\Gamma$  (возможно, через бесконечно удаленную точку) от  $z_1$  к  $z_2$  в таком направлении, чтобы дуга  $z_1 z_2$  не содержала в себе  $z_3$ . Этим направление обхода на  $\Gamma$  определено и тогда внутренностью  $\Gamma$  называется область, расположенная слева от  $\Gamma$  при движении по этому направлению. На самом деле этой областью является верхняя или нижняя полуплоскость.

**Задача 1.** Найти дробно-линейное преобразование, отображающее внутренность единичного круга на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки  $z_1 = +1, z_2 = i, z_3 = -1$  перешли соответственно в точки  $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 2$ .

**Задача 2.** Записать дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости в себя, при котором точки  $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$  переходят соответственно в точки  $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3$ .

## ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### § 7.1. Изображение Лапласа

В этой главе мы, как правило, будем рассматривать функции  $f(t)$  действительного переменного  $t$ , заданные на  $[0, \infty)$ . Иногда будем считать, что  $f(t)$  определена на  $(-\infty, \infty)$ ,

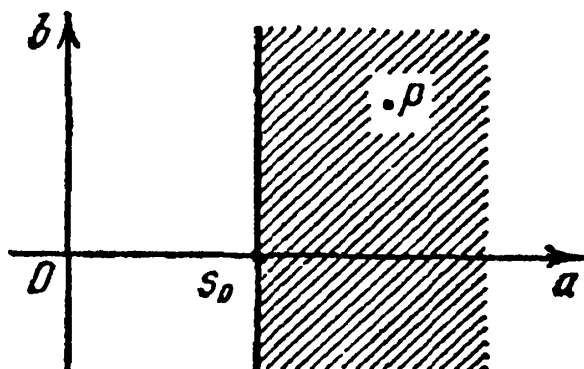


Рис. 158

но при  $t < 0$  функция  $f(t) \equiv 0$ . Кроме того, будем предполагать, что функция  $f(t)$  кусочно-непрерывна и на каждом конечном промежутке имеет конечное число точек разрыва первого рода. Пусть  $p = a + ib$  — комплексное число.

Рассмотрим функцию

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Если

$$|f(t)| \leq M \exp(s_0 t), \quad (2)$$

где  $a > s_0$ , то функция  $F(p)$  аналитическая в полуплоскости  $\text{Re} p > s_0$  (рис. 158).

В самом деле,

$$\begin{aligned}
|F'(p)| &= \left| \int_0^{\infty} t \exp(-at - ibt) f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} t \exp(-at) |f(t)| dt \leq \\
&\leq \int_0^{\infty} \exp(-at) \cdot t M \exp(s_0 t) dt = \\
&= M \int_0^{\infty} t \exp(-(a - s_0)t) dt < \infty, \quad (3)
\end{aligned}$$

так как  $a > s_0$ . Законность дифференцирования по  $p$  под знаком интеграла следует из неравенства (3) и того факта, что функция  $tf(t)\exp(-pt)$  кусочно-непрерывна (см. теорему 2 § 2.15).

Функция  $F(p)$  называется *изображением Лапласа* функции  $f$ , *L-изображением* или *преобразованием Лапласа*.

Мы будем употреблять обозначения

$$F(p) = L(f(t); p), \quad f(t) \doteq F(p), \quad F(p) \doteq f(t).$$

Функцию  $f(t)$  в этом случае называют *начальной функцией* или *оригиналом*. Число  $s_0$  ( $s_0 = s_0(f)$ ) называется *показателем роста функции  $f(t)$*  (ниже, если особо не оговорено, то мы считаем, что показатель роста  $f$  равен  $s_0$ ).

Процесс нахождения изображения для заданного оригинала и обратно, нахождение оригинала по известному изображению называется *операционным исчислением*, начало которому положил Хевисайд<sup>1</sup>. Разработав операционное исчисление, Хевисайд не дал ему обоснования. Отметим, что он рассматривал преобразование

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt,$$

т. е.  $\tilde{F}(p) = pF(p)$ .

В одних вопросах удобным является преобразование Лапласа, в других – преобразование Хевисайда. Мы будем рассматривать преобразование Лапласа.

Обоснование операционного исчисления было дано в двадцатых годах нашего века в работах ряда математиков.

<sup>1</sup> О. Хевисайд (1850–1925) – английский инженер-электрик.

**Теорема 1 (единственности).** Если две непрерывные функции  $f(t)$  и  $g(t)$  имеют одно и то же  $L$ -изображение  $F(p)$ , то они тождественно равны.

Мы не доказываем эту теорему.

На основании теоремы 1 мы можем сказать, что для непрерывной функции  $f(t)$ , тождественно не равной нулю, изображение не может быть периодической функцией.

В самом деле, если  $\forall p F(p) = F(p + \omega)$ , где  $\omega \neq 0$ , то

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt)f(t)dt = \int_0^{\infty} \exp(-(p + \omega)t)f(t)dt.$$

По теореме 1

$$f(t) = \exp(-\omega t)f(t),$$

т. е.  $\exp(-\omega t) \equiv 1$  ( $\omega \neq 0$ ), чего быть не может.

## § 7.2. Изображение простейших функций и свойства изображений

*Единичной функцией* или *функцией Хевисайда* называется функция

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что показатель роста этой функции  $s_0 = 0$ . Найдем  $L$ -изображение этой функции в области  $\text{Re } p > 0$ :

$$L(\sigma_0(t); p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (1)$$

Аналогично для функции  $f(t) = \cos t$  интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} L(\cos t; p) &= \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-pt)\cos t dt = \{ \exp(-pt) = \{u, \cos t dt = dv \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-pt) \sin t \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \exp(-pt) \sin t dt = \\
&= p \int_0^\infty \exp(-pt) \sin t dt = \\
&= p \left[ -\exp(-pt) \cos t \Big|_0^\infty - p \int_0^\infty \exp(-pt) \cos t dt \right] = \\
&= p - p^2 L[\cos t; p].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$L(\cos t; p) = \frac{p}{1+p^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

т. е.

$$\cos t \doteq \frac{p}{1+p^2}. \quad (2)$$

Попутно мы доказали, что

$$L(\cos t; p) = pL(\sin t; p),$$

откуда

$$\sin t \doteq \frac{1}{1+p^2}. \quad (3)$$

**Теорема 1 (подобия).** Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то  $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$  ( $\alpha > 0$ ,  $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \alpha s_0\}$ ).

В самом деле,

$$\begin{aligned}
L[f(\alpha t); p] &= \int_0^\infty \exp(-pt) f(\alpha t) dt = \left\{ \alpha t = u, dt = \frac{du}{\alpha} \right\} = \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p}{\alpha} u\right) f(u) du = \frac{1}{\alpha} L\left[f(u); \frac{p}{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

На основании теоремы 1 получаем



$$\cos \alpha t \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{p/\alpha}{1 + (p/\alpha)^2} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}; \quad (4)$$

$$\sin \alpha t \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + (p/\alpha)^2} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}. \quad (5)$$

**Теорема 2 (свойство линейности).** *Имеет место равенство*

$$L[Af(t) + Bg(t); p] = AL[f(t); p] + BL[g(t); p],$$

где  $A, B$  — постоянные числа.

Это свойство вытекает из соответствующего свойства несобственного интеграла. Отметим, что если показатели роста функций  $f$  и  $g$  соответственно равны  $s_0$  и  $\bar{s}_0$ , то изображение  $Af + Bg$  существует в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \bar{s}_0\}$ .

**Пример 1.** Найти изображение функции

$$f(t) = 3\sigma_0(t) + 2 \cos 3t.$$

В силу (1), (4) и теоремы 2 имеем

$$L[f(t); p] = 3L[\sigma_0(t); p] + 2L[\cos 3t; p] = \frac{3}{p} + 2 \frac{p}{p^2 + 9}.$$

**Пример 2.** Найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2 + 16}.$$

Представим изображение  $F(p)$  в виде

$$F(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{4}{p^2 + 4^2}.$$

Имеем

$$\frac{1}{p} \doteq \sigma_0(t), \quad \frac{4}{p^2 + 4^2} \doteq \sin 4t.$$

Следовательно, оригинал (по теореме 1 § 7.1)

$$f(t) = 2\sigma_0(t) + \frac{1}{2} \sin 4t.$$

Теорема 3 (смещение изображения).

$$L[f(t)\exp(-\alpha t); p] = L[f(t); p = \alpha], \operatorname{Re}(p + \alpha) > s_0.$$

Доказательство очевидно.

Пример 3. Найти изображение функций  $e^{-\alpha t}\cos\beta t$ ,  $e^{-\alpha t}\sin\beta t$ ,  $e^{-\alpha t}$ .

Так как

$$\cos\beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2},$$

то по теореме 3

$$L[\exp(-\alpha t)\cos\beta t; p] = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (6)$$

Совершенно аналогично, используя формулы (5) и (1), имеем

$$L[\exp(-\alpha t)\sin\beta t; p] = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad (7)$$

$$L[\exp(-\alpha t); p] = L[\sigma_0(t); p + \alpha] = \frac{1}{p + \alpha}. \quad (8)$$

Пример 4. Найти  $L[\operatorname{ch}\alpha t; p]$ ,  $L[\operatorname{sh}\alpha t; p]$ .

Используя теорему 2 и равенство (8), имеем

$$\begin{aligned} L[\operatorname{ch}\alpha t; p] &= \\ &= L\left[\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}; p\right] = \frac{1}{2}L[e^{\alpha t}; p] + \frac{1}{2}L[e^{-\alpha t}; p] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$L[\operatorname{sh}\alpha t; p] = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}.$$

Пример 5. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = 1/(p^2 + 2p + 5).$$

Имеем

$$F(p) = \frac{2}{2[(p+1)^2 + 2^2]}, \quad \frac{2}{p^2 + 2^2} \doteq \sin 2t.$$

$$\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} \doteq e^{-t} \sin 2t, \quad f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Теорема 4 (дифференцирование изображения)

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L[f(t); p] = L[t^n f(t); p].$$

Доказательство. Если  $\operatorname{Re} p > s_0$ , где  $s_0$  — показатель роста функции  $f(t)$ , то интеграл

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) \exp(-pt) dt$$

существует при любом  $n = 1, 2, \dots$ . Далее, очевидно, что

$$\frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t)^n \exp(-pt) f(t) dt.$$

Отсюда

$$(-1)^n L[f(t)t^n; p] = \frac{d^n}{dp^n} L[f(t); p].$$

Пример 6. Так как  $\frac{1}{p} \doteq \sigma_0(t)$ , то в силу теоремы 4 получаем

$$(-1) \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} \right) \doteq 1 \cdot t,$$

т. е.

$$t \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Если  $n$  не целое, то

$$t^n \cong \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}},$$

где

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^a dt = L[t^a; 1].$$

При натуральном  $n$  имеем  $\Gamma(n+1) = n!$ .

**Пример 7.** Найти изображение функции  $t \cos \alpha t$ .  
Имеем

$$\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \cong \cos \alpha t, \quad - \left( \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right)' \cong t \cos \alpha t$$

или

$$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2} \cong t \cos \alpha t. \quad (10)$$

**Теорема 5** (о дифференцировании оригинала). *Справедлива формула*

$$L[f'(t); p] = pL[f(t); p] - f(0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0) \quad (11)$$

*в предположении, что функция  $f(t)$  непрерывна<sup>1</sup>, имеет кусочно-непрерывную производную  $f'(t)$  на  $[0, \infty)$  с разрывами первого рода и показатели роста  $f(t)$  и  $f'(t)$  равны  $s_0$ .*

*Доказательство.* Имеем

$$L[f'(t); p] =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(-pt) f'(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \exp(-pt) f'(t) dt =$$

<sup>1</sup> Бывают случаи, когда функция  $f(t)$ , о которой говорится в теореме, задана на интервале  $(0, \infty)$  и существует предел справа  $f(0+0) =$

$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$ . Тогда в формуле (11) надо заменить  $f(0)$  на  $f(0+0)$ .

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ e^{-pt} f(t) \Big|_0^N + p \int_0^N e^{-pt} f(t) dt \right] =$$

$$= -f(0) + pL[f(t); p] \quad (\operatorname{Re} p > s_0),$$

потому что

$$|e^{-pN} f(N)| \leq e^{-aN} M e^{s_0 N} = M e^{-(a-s_0)N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Следствие 1. Справедлива формула

$$L[f^{(n)}(t); p] =$$

$$= p^n L[f(t); p] - p^{n-1} f(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (12)$$

$$(\operatorname{Re} p > s_0)$$

при условии, что  $f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  непрерывны,  $f^{(n)}$  кусочно-непрерывна на  $[0, \infty)$ , а рост функции  $f$  вместе с ее производными до порядка  $n$  включительно равен  $s_0$ .

В частности, при

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad (13)$$

имеет место

$$L[f^{(n)}(t); p] = p^n L[f(t); p]. \quad (14)$$

Пример 8. Найти изображение функции  $f(t) = \cos^2 t$ . Пусть  $F(p) \equiv \cos^2 t = f(t)$ . Тогда

$$f'(t) \equiv pF(p) - f(0).$$

Но

$$f(0) = \cos^2 0 = 1,$$

$$f'(t) = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t \equiv -\frac{2}{p^2 + 4}.$$

Следовательно,

$$pF(p) - 1 = -\frac{2}{p^2 + 4},$$

откуда

$$F(p) = \frac{1}{p} \left[ 1 - \frac{2}{p^2 + 4} \right] = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}.$$

Этот же результат мы получим, если воспользуемся равенством

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2},$$

$$L[\cos^2 t; p] = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4} = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}.$$

Теорема 6 (интегрирование оригинала).

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

В самом деле, изменяя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau dt &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau) d\tau dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left. \frac{-e^{-pt}}{p} \right|_\tau^\infty d\tau = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{p} L[f(\tau); p] = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Теорема 7 (интегрирование изображения).

Если интеграл  $\int_p^\infty F(q) dq$  сходится, то он является

изображением функции  $f(t)/t$ :

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq.$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty \left( \int_0^\infty e^{-qt} f(t) dt \right) dq =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left( \int_p^{\infty} e^{-qt} dq \right) f(t) dt = \int_0^{\infty} \left( -\frac{e^{-qt}}{t} \Big|_{q=p}^{\infty} \right) f(t) dt = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = L \left[ \frac{f(t)}{t}; p \right].
\end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 1.** Мы применяем здесь и ниже изменение порядка интегрирования. Согласно теореме Фубини, которую мы здесь не доказываем, эта операция законна, если полученный после изменения кратный интеграл абсолютно сходится. Кроме того, мы считаем, что путь интегрирования лежит целиком в полуплоскости  $\text{Re } p > s_0$ .

**С л е д с т в и е 2.**

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(q) dq,$$

*если сходятся соответствующие несобственные интегралы.*

**П р и м е р 9.** Найти изображение функции  $\int_0^t \sin 2\tau d\tau$ .

Имеем

$$\sin 2\tau \doteq \frac{2}{p^2 + 4}.$$

По теореме 6

$$\int_0^t \sin 2\tau d\tau \doteq \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

**П р и м е р 10.** Найти изображение функции  $\frac{\sin t}{t}$ .

Нам известно, что  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ . Поэтому по теореме 7

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Пример 11. Найти интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Используя пример 10 и следствие 2, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \operatorname{arctg} q \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

**Теорема 8 (запаздывание оригинала).**

Пусть  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , тогда

$$L[f(t - t_0); p] = e^{-pt_0} L[f(t); p],$$

где  $t_0$  — некоторая точка.

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} L[f(t - t_0); p] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \\ &= \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \{t - t_0 = u, dt = du\} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(u+t_0)} f(u) du = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{-pt_0} L[f(u); p]. \end{aligned}$$

Пример 12. Так как  $L[\sigma_0(t); p] = \frac{1}{p}$ , то (рис. 159)



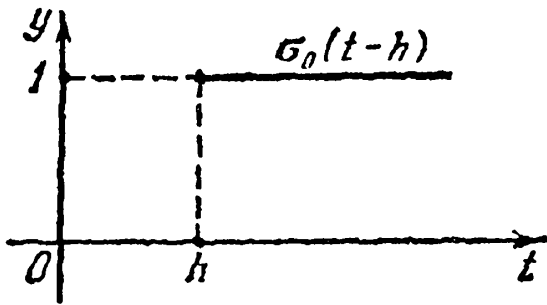


Рис. 159

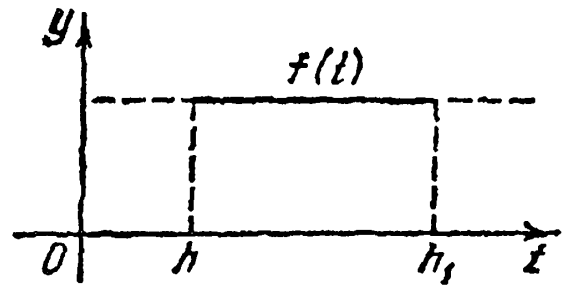


Рис. 160

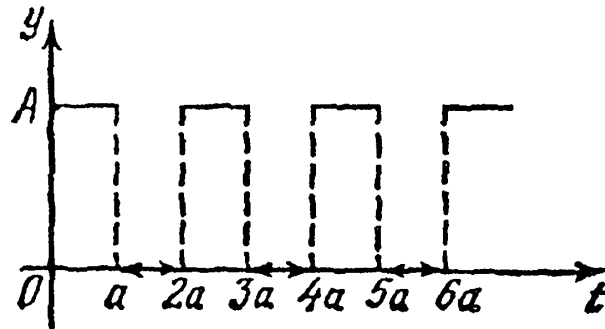


Рис. 161

$$L[\sigma_0(t-h); p] = e^{-ph} \frac{1}{p}.$$

Пример 13. Пусть (рис. 160)

$$f(t) = \sigma_0(t-h) - \sigma_0(t-h_1) \quad (h < h_1).$$

По теореме 2 и теореме 8 имеем

$$L[f(t); p] = L[\sigma_0(t-h); p] - L[\sigma_0(t-h_1); p] = \frac{e^{-ph} - e^{-ph_1}}{p}.$$

Пример 14. Найти изображение функции  $f(t)$  (рис. 161), определенной на отрезке  $[0, 2a]$  равенствами

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq a, \\ 0, & a < t < 2a \end{cases}$$

и продолженной затем на весь луч  $t > 0$  с периодом  $2a$ .  
Имеем

$$L[f(t); p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{-pt} f(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2ka}^{(2k+1)a} e^{-pt} A dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{p} [e^{-p2ka} - e^{-p(2k+1)a}] = \\
&= \frac{A(1 - e^{-pa})}{p} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kpa} = \frac{A(1 - e^{-pa})}{p(1 - e^{-2pa})} = \frac{A}{p(1 + e^{-pa})}.
\end{aligned}$$

Выражение

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

называется *сверткой функций*  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  и обозначается символом  $f_1 * f_2$ .

Легко проверить, что

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

(надо сделать замену переменной  $t - \tau = u$ ).

**Теорема 9.** *Преобразование Лапласа от свертки функций  $f_1$  и  $f_2$  равно произведению преобразований Лапласа от  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  ( $s_0(f_1) = s_0(f_2)$ ):*

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau; p\right] = L[f_1(t); p] \cdot L[f_2(t); p].$$

**Доказательство.** Напомним, что мы считаем, что  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  при  $t < 0$ . Изменяя порядок интегрирования (рис. 162) и учитывая, что  $f_2(t - \tau) = 0$  для  $0 < t < \tau$ ,

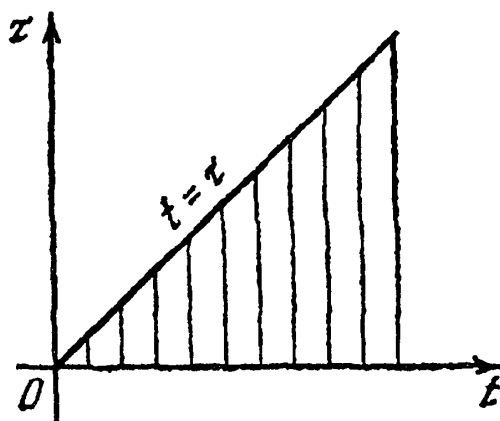


Рис. 162

имеем

$$\begin{aligned}
L[f_1 * f_2; p] &= \\
&= \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau dt = \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau) dt d\tau =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left( \int_{\tau}^{\infty} e^{-p t} f_2(t - \tau) dt \right) d\tau = \{t - \tau = z, dt = dz\} = \\
&= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left( \int_0^{\infty} e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz \right) d\tau = \\
&= \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} f_2(z) e^{-pz} dz = \\
&= L[f_1(\tau); p] \cdot L[f_2(z); p].
\end{aligned}$$

Отметим, что двойной интеграл по бесконечному сектору  $\{0 < \tau \leq t, 0 < t < \infty\}$  от функции  $e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau)$  абсолютно сходится при  $\operatorname{Re} p > s_0$ .

Пример 15.

$$L \left[ \int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{ch} \alpha \tau d\tau; p \right] = L[e^t; p] \cdot L[\operatorname{ch} \alpha t; p] = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

Следствие 3. Пусть  $F(p) \cong f(t)$ ,  $G(p) \cong g(t)$ , тогда имеет место формула Дюамеля<sup>1</sup>

$$pF(p)G(p) \cong f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем по теореме 9

$$F(p)G(p) \cong \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда, по теореме 5 о дифференцировании оригинала, получаем

<sup>1</sup> Относительно функции  $g(t)$  можно сделать такое же примечание, как в сноске на с. 475. Дюамель (1797–1872) – французский математик.

$$pF(p)G(p) \doteq \\ \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.$$

**Теорема 10.** Если  $\mathcal{F}(f(x); y)$  и  $L[f(x); p]$  — соответственно преобразования Фурье и Лапласа функции  $f$  ( $s_0(f) < 0$ ), то

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f(x); y) = L[f(x); iy] + L[f(-x); -iy]. \quad (16)$$

В самом деле,

$$2\pi\mathcal{F}(f(x); y) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ixy} f(x)dx = \\ = L[f(x); iy] + \int_0^{\infty} e^{ixy} f(-x)dx = \\ = L[f(x); iy] + L[f(-x); -iy].$$

По формуле (16) легко найти изображение Фурье, если известно преобразование Лапласа функции  $f$ .

**Пример 16.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \cos \beta x, & x \geq 0, \alpha > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти преобразование Фурье этой функции.

Преобразование Лапласа функции  $f$  существует ( $s_0(f) = -\alpha$ ), поэтому

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f(x); y) = L[f(x); iy] = L[e^{-\alpha x} \cos \beta x; iy] = \frac{iy + \alpha}{(iy + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Приведем без доказательства ряд теорем о нахождении оригинала по известному изображению.

**Теорема 11.** Пусть  $F(p)$  — аналитическая функция на расширенной комплексной плоскости и точка  $p = \infty$  правильная и  $F(\infty) = 0$ , т. е. ее ряд Лорана имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Тогда оригинал этого изображения дается формулой

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases} \quad (17)$$

В самом деле,

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

В силу теоремы 1 § 7.1 (единственности) теорема доказана.

**Теорема 12.** Пусть  $F(p)$  – дробно-рациональная функция с полюсами  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \text{Выч}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]. \quad (18)$$

Если  $p_k$  – простые полюсы и  $F(p) = A(p)/B(p)$ , где  $A(p)$ ,  $B(p)$  – многочлены без общих корней, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (19)$$

**Теорема 13** (формула Меллина<sup>1</sup>). Если  $F(p)$  – аналитическая функция в  $\text{Re } p > s_0$ ,  $F(p) \rightarrow 0$  равномерно

относительно  $\text{arg } p$ , или  $|p| \rightarrow \infty$ ,  $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M$ , то  $F(p)$

является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (x > s_0). \quad (20)$$

<sup>1</sup> Р. Х. Меллин (1854–1933) – финский математик.

Пример 17. Найти оригинал функции

$$F(p) = 1/(p - 1)(p^2 + 1).$$

Будем пользоваться теоремой 12. Здесь  $A(p) \equiv 1$ ,  $B(p) = (p - 1)(p^2 + 1)$ . Точки  $p = 1$ ,  $p = \pm i$  являются простыми полюсами функции  $F(p)$ . По формуле (19) имеем  $(B'(p) = 3p^2 - 2p + 1)$

$$f(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{it}}{2(1+i)} + \frac{e^{-it}}{2(i-1)} = \frac{1}{2}[e^t - \cos t - \sin t].$$

Пример 18. Найти оригинал  $f(t)$ , если  $F(p) = \sin(1/p)$ .  
Имеем

$$\sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3! p^3} + \frac{1}{5! p^5} - \dots,$$

т. е.  $F(p)$  удовлетворяет условию теоремы 11. Поэтому

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!} \frac{t^4}{4!} - \dots$$

Для удобства пользования сведем все полученные изображения элементарных функций в единую таблицу.

Номер по порядку	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
3	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
4	$\cos \alpha(t - t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2 + \alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$

Номер по порядку	Оригинал	Изображение
6	$\text{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
7	$\text{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
10	$t^n$	$\frac{\Gamma(n + 1)}{p^{n+1}}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
13	$t \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
14	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
15	$f^{(n)}(t), f(0) = \dots$ $\dots = f^{(n-1)}(0) = 0$	$p^n F(p)$
16	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$

Номер по порядку	Оригинал	Изображение
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_0^{\infty} F(q) dq$
18	$f(t - t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
19	$\sigma_0(t - h)$	$e^{-ph} \frac{1}{p}$
20	$f_1 * f_2$	$L[f_1; p] \cdot L[f_2; p]$
21	$f(t)g(0) +$ $+ \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau$	$pL[f; p] \cdot L[g; p]$
22	$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^k}{k!} \quad (t > 0)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$

### § 7.3. Приложения операционного исчисления

7.3.1. Операторное уравнение. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)}(x) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \quad (1)$$

Требуется найти решение уравнения (1) для  $t \geq 0$  при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Пусть  $x(t)$  является решением (1), удовлетворяющее начальным условиям (2). Тогда после подстановки этой функции в (1) мы получим тождество. Значит, функция, стоящая в левой части (1), и функция  $f(t)$  имеют одно и то же  $L$ -изображение:



$$L \left[ \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k}; p \right] = L[f(t); p].$$

В силу следствия 1 § 7.2

$$L \left[ \frac{d^k x}{dt^k}; p \right] = p^k L[x; p] - p^{k-1} x(0) - \dots - \\ - p x^{(k-2)}(0) - x^{(k-1)}(0).$$

Поэтому, используя свойство линейности изображения, получаем

$$a_n L \left[ \frac{d^n x}{dt^n}; p \right] + \dots + a_0 L[x; p] = L[f; p];$$

$$a_n [p^n L[x; p] - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 - \dots - p x_0^{(n-2)} - \\ - x_0^{(n-1)}] + a_{n-1} [p^{n-1} L[x; p] - p^{n-2} x_0 - \dots - p x_0^{n-3} - \\ - x_0^{(n-2)}] + \dots + a_1 [L[x; p] - x_0] + a_0 L[x; p] = L[f; p].$$

Для краткости записи обозначим  $L[x; p] = \bar{x}(p)$ ,  $L[f; p] = F(p)$ . Тогда

$$\bar{x}(p) \cdot [a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0] = \\ = a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}] + \\ + a_{n-1} [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)}] + \dots \\ \dots + a_2 [p x_0 + x'_0] + a_1 x_0 + F(p). \quad (3)$$

Уравнение (3) будем называть *вспомогательным уравнением* или *изображающим уравнением*, или *операторным уравнением*.

Отметим, что коэффициент при  $\bar{x}(p)$  в (3) получается

из левой части (1) формальной заменой производных  $\frac{d^k x}{dt^k}$  на степени  $p^k$ . Обозначим этот коэффициент через

$$R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Легко видеть, что этот коэффициент является левой частью характеристического уравнения для дифференци-

ального уравнения (1) (см. (2) § 1.16). Тогда изображение решения находим в виде

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} + \frac{\Psi_{n-1}(p)}{R_n(p)} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{n-1}(p) = & a_1 x_0 + a_2 (px_0 + x'_0) + a_3 (p^2 x_0 + px'_0 + \\ & + x''_0) + \dots + a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + px_0^{(n-2)} + \\ & + x_0^{(n-1)}]. \end{aligned}$$

Если начальные условия нулевые, т. е.  $x_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$ , то формула (4) запишется

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}. \quad (4')$$

Если теперь по изображению (4) или (4') мы найдем оригинал, то в силу теоремы единственности это и будет искомое решение  $x(t)$ .

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\ddot{x} + 4x = 2, \quad x_0 = x'_0 = 0.$$

По формуле (4') имеем

$$\bar{x}(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)},$$

так как  $2 \doteq 2/p$ . Разложим изображение на простейшие дроби

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right].$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{2} \sigma_0(t) - \frac{1}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Мы получили решение  $(1 - \cos 2t)/2$  только для  $t \geq 0$ . Легко проверить, что оно удовлетворяет нашему уравнению и при  $t < 0$ . Впрочем, этот факт следует из общих соображений, на которых мы не останавливаемся. Это замечание относится и к примерам 2-4.

Можно также воспользоваться теоремой 12 § 7.2  $A \equiv 2$ ,  $B = p(p^2 + 4)$ ,  $B' = 3p^2 + 4$ ;  $0, \pm 2i$  — простые нули многочлена  $B(p)$ ):

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \left[ \frac{e^{0t}}{B'(0)} + \frac{e^{2it}}{B'(2i)} + \frac{e^{-2it}}{B'(-2i)} \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{-8} e^{2it} + \frac{1}{-8} e^{-2it} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t. \end{aligned}$$

Пример 2.  $y'' = 2y' + 5y = \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . Составим вспомогательное уравнение:

$$\begin{aligned} [p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0)] + 2[p \bar{y}(p) - y(0)] + 5 \bar{y}(p) &= \\ &= \frac{1}{p^2 + 1}, \end{aligned}$$

$$\bar{y}(p)(p^2 + 2p + 5) = \frac{1}{p^2 + 1} + 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{y}(p) &= \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{1}{p^2 + 2p + 5} = \\ &= \frac{p^2 + 2}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)}. \end{aligned}$$

Многочлен  $B(p) = (p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)$  имеет простые нули  $p = \pm i$ ,  $p = -1 \pm 2i$ . На основании теоремы 12 § 7.2 ( $A = p^2 + 2$ ,  $B'(p) = 2p(p^2 + 2p + 5) + 2(p + 1)(p^2 + 1)$ ) имеем:

$$A(\pm i) = 1, B'(i) = 4i(2 + i), B'(-i) = -4i(2 - i),$$

$$A(-1 + 2i) = -1 - 4i, B'(-1 + 2i) = -8i(2i + 1),$$

$$A(-1 - 2i) = 4i - 1, B'(-1 - 2i) = -8i(2i - 1),$$

$$y(x) = \frac{e^{ix}}{4i(2 + i)} + \frac{e^{-ix}}{-4i(2 - i)} + \frac{-(1 + 4i)e^{(-1+2i)x}}{-8i(2i + 1)} +$$

$$+ \frac{-(4i-1)e^{-(1+2i)x}}{-8i(2i-1)} = \frac{\sin x}{5} - \frac{\cos x}{10} + e^{-x} \left[ \frac{\cos 2x}{10} + \frac{9}{20} \sin 2x \right].$$

При решении дифференциального уравнения иногда удобно использование формулы Дюамеля (см. (15) § 7.2).

Будем рассматривать уравнение (1) при нулевых начальных условиях:  $x(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$ . К этому случаю всегда можно свести задачу заменой искомой функции по формуле

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0).$$

Допустим, известно решение уравнения (1) при правой части, равной единице, и нулевых начальных условиях. Операторное уравнение для данной задачи имеет вид

$$R_n(p) \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p} \quad (5)$$

где  $\bar{x}_1(p)$  – изображение решения  $x_1(t)$  указанной задачи. Из равенства (4') и (5) находим

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} = p \bar{x}_1(p) F(p). \quad (6)$$

Согласно формуле Дюамеля

$$pF(p) \bar{x}_1(p) \doteq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau) x'_1(t-\tau) d\tau$$

или учитывая, что  $x_1(0) = 0$ , получаем

$$\bar{x}(p) = pF(p) \bar{x}_1(p) \doteq \int_0^t f(\tau) x'_1(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x'_1(t - \tau) d\tau, \quad (7)$$

где  $x_1(t)$  — решение уравнения (1) при  $f(t) \equiv 1$  и нулевых начальных условиях.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$x'' - x = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решим вначале задачу Коши для уравнения

$$x''_1 - x_1 = 1, \quad x_1(0) = x'_1(0) = 0.$$

Составим операторное уравнение:

$$p^2 \bar{x}_1(p) = \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p}.$$

Отсюда

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1.$$

**Замечание.** Так как правая часть уравнения  $x''_1 - x'_1 = 1$  имеет специальный вид, то решение этого уравнения можно проводить и обычным образом (см. § 1.18).

По формуле (7)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{2(1 + e^\tau)} d\tau = \\ &= \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} d\tau}{1 + e^\tau} - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \frac{d(e^{-\tau} + 1)}{1 + e^\tau} = -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t + 1}{2} - \\ &- \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} de^{-\tau}}{e^{-\tau} + 1} = -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t + 1}{2} - \frac{e^t}{2} (e^{-t} - 1) + \\ &+ \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{d(e^{-\tau} + 1)}{e^{-\tau} + 1} = -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t + 1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{e^t}{2} \ln \frac{e^{-t} + 1}{2} = \operatorname{sh} t \ln \frac{e^t + 1}{2} + \frac{1}{2} [-te^t + e^t - 1].$$

7.3.2. Решение систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим этот вопрос на конкретном примере.

Пример 4. Пусть требуется найти решение линейной системы

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{x} + \dot{y} + x &= 1, \\ \dot{x} + 3\dot{y} + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

при начальных условиях  $y(0) = x(0) = 0$ .

Обозначим  $\bar{x}(p)$ ,  $\bar{y}(p)$  изображения искомых функций. Составим вспомогательные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2p\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) + \bar{x}(p) &= \frac{1}{p}, \\ p\bar{x}(p) + 3p\bar{y}(p) + 2\bar{y}(p) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, для изображений мы получили линейную систему алгебраических уравнений. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2p+1 & p \\ p & 3p+2 \end{vmatrix} = 5p^2 + 7p + 2.$$

Решая систему алгебраических уравнений, находим

$$\bar{x}(p) = \frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)}, \quad \bar{y}(p) = \frac{-1}{5p^2+7p+2}.$$

Изображение  $\bar{y}(p)$  запишем в виде

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{5} \frac{1}{(p+0,7)^2 - 0,09} = \frac{2}{3} \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2},$$

откуда

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{-0,7t} \operatorname{sh}(0,3)t.$$

Далее

$$\begin{aligned}\bar{x}(p) &= \frac{3}{5[(p+0,7)^2 - (0,3)^2]} + \frac{1}{p} - \frac{5p+7}{5p^2+7p+2} = \\ &= 2 \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} + \frac{1}{p} - \frac{p+0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} - \\ &\quad - \frac{0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2},\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}x(t) &= 2e^{-0,7t}\text{sh}(0,3t) + 1 - e^{-0,7t}\text{ch}(0,3t) - \frac{7}{3}e^{-0,7t}\text{sh}(0,3t) = \\ &= 1 - \frac{1}{3}e^{-0,7t}\text{sh}(0,3t) - e^{-0,7t}\text{ch}(0,3t).\end{aligned}$$

### 7.3.3. Вычисление интегралов.

Пример 5. Вычислить интеграл  $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt$ .

Найдем изображение этого интеграла:

$$\begin{aligned}L[I(x); p] &= \int_0^{\infty} e^{-px} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px} (1 - \cos xt) dx \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\infty} L[1 - \cos xt; p] \frac{dt}{t^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + t^2} \right] \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{p(p^2 + t^2)} = \frac{1}{p^2} \text{arctg} \frac{t}{p} \Big|_{t=0}^{\infty} = \\ &= \frac{\pi}{2p^2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I(x) = \frac{\pi}{2} x.$$

**ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ****§ 8.1. Понятие обобщенной функции**

В последнее время в математике и ее приложениях получили большое применение обобщенные функции. Само понятие обобщенная функция возникло в работах П. Дирака<sup>1</sup>.

Общая математическая теория обобщенных функций заложена в работах С. Л. Соболева<sup>2</sup> и Л. Шварца<sup>3</sup>.

Ниже излагаются элементарные сведения из теории обобщенных функций, заданных на всей бесконечной действительной оси  $(-\infty, \infty)$ .

В основе этой теории лежит пространство  $S$ , состоящее из функций  $\varphi(x)$ , вообще говоря комплекснозначных ( $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — действительные функции). Каждая функция  $\varphi \in S$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\varphi(x)$  непрерывная на оси  $(-\infty, \infty)$  бесконечно дифференцируемая функция;
- 2) для любого неотрицательного целого числа  $k$  и любого многочлена произвольной степени  $n$

---

<sup>1</sup> П. Дирак (1902 г. рожд.) — английский физик.

<sup>2</sup> С. Л. Соболев (1908 г. рожд.) — советский математик.

<sup>3</sup> Л. Шварц (1915 г. рожд.) — французский математик.



$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

произведение  $k$ -й производной от  $\varphi(x)$  на многочлен  $P_n(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x)P_n(x) = 0.$$

Из этих свойств вытекает, что для каждой функции  $\varphi \in S$  существует конечный несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)| dx < \infty \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В самом деле, по условию, например, существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + x^2)^m \varphi^{(k)}(x)] = 0,$$

где  $m$  — любое натуральное число. Следовательно, для числа  $\varepsilon = 1$  существует такое число  $N > 0$ , что

$$|(1 + x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| < 1 \quad (2)$$

для  $\forall x$  с  $|x| > N$ . И так как функция  $(1 + x^2)^m \varphi^{(k)}(x)$  непрерывна на отрезке  $[-N, N]$ , то по теореме Вейерштрасса (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», с. 94, теорема 1) ее модуль ограничен на  $[-N, N]$  некоторым числом  $M$ :

$$|(1 + x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| \leq M \quad (x \in [-N, N]).$$

Но тогда

$$|(1 + x^2)^m \varphi^{(k)}(x)| \leq M + 1 \quad (\forall x \in (-\infty, \infty))$$

и, следовательно,

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{M + 1}{(1 + x^2)^m} \quad (x \in (-\infty, \infty)), \quad (3)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)| dx \leq (M + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^m} < \infty.$$

Этим мы доказали, что всякая функция  $\varphi \in S$ , вместе со своими производными  $\varphi^{(k)}(x)$ , принадлежит пространству  $L' = L'(-\infty, \infty)$ .

Примером функции  $\varphi \in S$  может служить функция  $\varphi(x) = \exp(-x^2)$ . Это бесконечно дифференцируемая на  $(-\infty, \infty)$  функция. Ее производные соответственно равны:

$$\varphi'(x) = -2x \exp(-x^2), \quad \varphi''(x) = (4x^2 - 2) \exp(-x^2),$$

$$\varphi'''(x) = (-8x^3 + 12x) \exp(-x^2).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$\varphi^{(k)}(x) = Q_k(x) \exp(-x^2),$$

где  $Q_k(x)$  есть некоторый многочлен степени  $k$ .

Если теперь  $P_n(x)$  есть произвольный многочлен степени  $n$ , то произведение  $P_n(x)Q_k(x) = R_{n+k}(x)$  есть, очевидно, некоторый многочлен степени  $n+k$  и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x) P_n(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} R_{n+k}(x) \exp(-x^2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (c_0 x^{n+k} + \dots + c_{n+k-1} x + c_{n+k}) \exp(-x^2) = 0, \end{aligned}$$

так как при любом  $l > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^l \exp(-x^2) = 0$$

(см. ту же книгу, с. 158, пример 2).

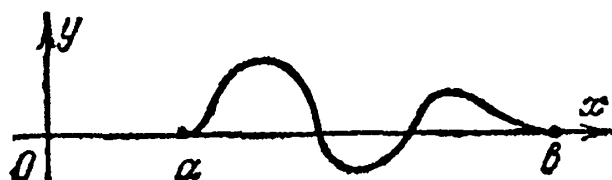


Рис. 163

Вторым примером функции  $\varphi \in S$  является так называемая *финитная на  $(-\infty, \infty)$  функция*. Это бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого отрезка  $[a, b]$  (рис. 163). Любая ее производная тоже равна нулю вне  $[a, b]$  и, следовательно, для любого многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x) P_n(x) = 0.$$

Во множестве  $S$  вводится понятие предельного перехода.

Последовательность  $\{\varphi_k(x)\}$  функций из  $S$  называется *сходящейся к функции  $\varphi \in S$  в смысле  $S$* , если для любого

неотрицательного целого числа  $l$  и любого многочлена  $P_n(x)$  имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_k^{(l)}(x) - \varphi^{(l)}(x))P_n(x) = 0$$

равномерно относительно всех  $x \in (-\infty, \infty)$ . Иначе говоря, для любого неотрицательного целого числа  $l$ , любого многочлена  $P_n(x)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $k_0$  такое, что  $|\varphi_k^{(l)}(x) - \varphi^{(l)}(x)| \cdot |P_n(x)| < \varepsilon$ , для  $\forall k > k_0$  и  $\forall x \in (-\infty, \infty)$ .

Если последовательность  $\{\varphi_k\}$  сходится к  $\varphi$  в смысле  $S$ , то пишут

$$\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x) \quad (S) \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \varphi(x) \quad (S).$$

Множество функций  $\varphi \in S$  обладает следующим свойством: если  $\varphi \in S$ ,  $\psi \in S$  и  $\alpha, \beta$  — произвольные числа, вообще комплексные, то

$$\alpha\varphi + \beta\psi \in S.$$

Благодаря этому свойству множество  $S$  называется *линейным множеством* (или *пространством*).

Введем определение: если каждой функции  $\varphi \in S$ , в силу некоторого закона, приведено в соответствие число  $y$ , то говорят, что на  $S$  определен функционал  $F$  и пишут

$$y = F\varphi = (F, \varphi).$$

Функционал  $F$  называется *линейным*, если он обладает свойством: каковы бы ни были функции  $\varphi \in S$  и  $\psi \in S$  и комплексные числа  $\alpha, \beta$  справедливо равенство

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F\varphi + \beta F\psi$$

или, в другой записи,  $(F, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(F, \varphi) + \beta(F, \psi)$ .

Функционал  $F$  называется *непрерывным*, если для любой последовательности  $\{\varphi_k\}$  функций  $\varphi_k \in S$ , сходящейся в смысле  $S$  к некоторой функции  $\varphi$ , имеет место равенство

$$\lim_{\varphi_k \rightarrow \varphi(S)} F(\varphi_k) = F(\varphi).$$

*Линейный и непрерывный функционал, определенный на  $S$ ,*

$$F(\varphi) = (F, \varphi) \quad (\varphi \in S)$$

*называется обобщенной функцией над  $S$ .*

Совокупность всех обобщенных функций над  $S$  обозначается через  $S'$ . Приведем примеры обобщенных функций.

Пусть  $F(x)$  есть кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|F(x)| \leq c(1 + x^2)^l, \quad (4)$$

где  $l$  — некоторое натуральное число. Покажем, что интеграл

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi(x) dx \quad (\varphi \in S) \quad (5)$$

есть обобщенная функция  $F \in S'$ , т. е. линейный непрерывный функционал над  $S$ . В самом деле, на основании неравенства (4) и неравенства (3), в котором надо положить  $k = 0$ ,  $m = l + 1$ , интеграл (5) сходится, и притом абсолютно:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)\varphi(x)| dx &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^l \frac{M + 1}{(1 + x^2)^{l+1}} dx = \\ &= c(M + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty. \end{aligned}$$

Линейность функционала (5) очевидна. Функционал (5) является также непрерывным в смысле  $S$ . В самом деле, пусть

$$\varphi_n \rightarrow \varphi (S).$$

Тогда, в частности, стремится к нулю величина

$$\max_x (1 + x^2)^{l+1} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $N > 0$  такое, что при  $n > N$

$$\max_x (1 + x^2)^{l+1} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Но тогда, в силу (4) и (6).

$$|(F, \varphi_n) - (F, \varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x) [\varphi_n(x) - \varphi(x)] dx \right| \leq$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{l+1} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{1+x^2} \leq$$

$$\leq c\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = c_1\varepsilon \quad (n > N),$$

и мы доказали непрерывность функционала  $(F, \varphi)$ .

Важно отметить, что для того чтобы две кусочно-непрерывные функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , удовлетворяющие при некотором  $l$  неравенству (4), представляли при помощи равенства (5) равные обобщенные функции  $F_1 = F_2 \in S'$ , необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство  $F_1(x) = F_2(x)$  во всех точках непрерывности  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ .

Достаточность условия очевидна, так как величина интеграла не изменится, если подынтегральную функцию изменить в конечном числе точек. Но можно доказать, что это условие является также и необходимым.

В связи со сказанным обобщенную функцию, представляемую при помощи интеграла (5) кусочно-непрерывной функцией  $F(x)$ , отождествляют с этой обычной функцией.

Например,  $\sin x$ ,  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\exp(-x^2)$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $\sigma_0(x) =$

$= \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  — функция Хевисайда, обычные функции,

но также и обобщенные, принадлежащие  $S'$ . Для них справедливы неравенства типа (4):

$$|\sin x| \leq 1, \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1, \quad \exp(-x^2) \leq 1,$$

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| \leq c(1+x^2)^n, \quad |\sigma_0(x)| \leq 1.$$

Имеется много и других обычных функций  $F(x)$ , которые определяют при помощи равенства (5) обобщенную функцию  $F(F \in S')$ , хотя они и не удовлетворяют неравенству (4). Например, нетрудно показать, что функция

$\psi(x) = \ln|x|$ , хотя и не удовлетворяет неравенству (4), все же порождает обобщенную функцию ( $\psi \in S'$ ).

Однако существуют элементарные функции  $F(x)$ , для которых интеграл (5) не является линейным непрерывным функционалом над  $S$ . Функция  $F(x) = \exp(x^2)$  является примером такой функции. Ведь  $\psi(x) = \exp(-x^2) \in S$ , но

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x^2) \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \infty.$$

Обобщенную функцию  $F \in S'$ , порожденную обычной функцией  $F(x)$  в виде интеграла (5), называют *регулярной обобщенной функцией*.

Однако в  $S'$  входят также и другие обобщенные функции.

Важным примером обобщенной нерегулярной функции является *дельта-функция Дирака*, обозначаемая через  $\delta(x)$ .

Функция  $\delta(x)$  есть функционал, определенный на функциях  $\varphi \in S$  при помощи равенства  $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$  ( $\varphi \in S$ ).

$\delta$ -функция приводит в соответствие каждой функции  $\varphi \in S$  ее значение в точке  $x = 0$ . Можно доказать, что не существует обычной функции  $F(x)$ , которая представляла бы  $\delta$ -функцию в виде интеграла (5), т. е. функция Дирака — это подлинно обобщенная функция.

## § 8.2. Операции над обобщенными функциями

*Производная от обобщенной функции*  $F \in S'$  по определению есть обобщенная функция  $F'$ , определяемая равенством

$$(F', \varphi) = -(F, \varphi') \quad (\varphi \in S). \quad (1)$$

Так как из того, что  $\varphi \in S$ , следует, что  $\varphi' \in S$ , и из того, что  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  ( $S$ ), следует, что  $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$  ( $S$ ), то функционал  $(F, \varphi')$  является непрерывным функционалом над  $S$ . Линейность его очевидна. Определение (1) естественно, потому что, если, например, обычная функция  $F(x) \in S$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x) \varphi(x) dx = F(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi'(x) dx =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi'(x) dx.$$

Ведь всякая функция из  $S$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Очевидно, что любая обобщенная функция  $F \in S'$  имеет производную (обобщенную) какого угодно порядка, определяемую по индукции  $F^{(k)} = (F^{(k-1)})'$ .

Таким образом,

$$(F^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (F, \varphi^{(k)}).$$

Например,

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0);$$

$$(\sigma'_0, \varphi) = -(\sigma_0, \varphi') =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - \varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) =$$

$$= (\delta, \varphi).$$

Таким образом, производная от регулярной обобщенной функции Хевисайда  $\sigma_0(x)$  равна  $\delta(x)$ , т. е. подлинно обобщенной функции ( $\sigma'_0(x) = \delta(x)$ ).

По определению *последовательность обобщенных функций  $F_n \in S'$  сходится к функции  $F \in S'$  ( $F_n \rightarrow F(S')$ ), если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n, \varphi) = (F, \varphi) \quad (\forall \varphi \in S).$$

Отсюда автоматически также следует, что последовательность производных  $F'_n$  сходится к производной  $F'$ , потому что

$$(F'_n, \varphi) = -(F_n, \varphi') \rightarrow -(F, \varphi') = (F', \varphi) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Можно рассматривать ряд

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (2)$$

функций  $u_k \in S'$ , имеющий своей суммой функцию  $F \in S'$ , что надо понимать в том смысле, что

$$\sum_{k=1}^N u_k \rightarrow F(S') \quad (N \rightarrow \infty).$$

Из сказанного, очевидно, следует, что ряд (2) можно почленно дифференцировать:

$$F' = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots, \quad (3)$$

т. е. ряд (3) сходится в смысле ( $S'$ ). Но тогда его можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$F^k = u^k_1 + u^k_2 + u^k_3 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для обобщенной функции  $F$  по определению вводится операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию  $\lambda(x)$  с помощью равенства  $(\lambda F, \varphi) = (F, \lambda\varphi)$ , где для некоторых  $l \quad |\lambda(x)| \leq c(1 + |x|^l)$ .

Отметим еще, что если  $F(x) \in S'$ ,  $\mu \neq 0$  — действительное число, то обобщенные функции  $F(\mu - x)$ ,  $F(\mu x)$  определяются при помощи равенств

$$(F(\mu - x), \varphi(x)) = (F(x), \varphi(\mu - x)),$$

$$(F(\mu x), \varphi(x)) = |\mu|^{-1} \left( F(x), \varphi\left(\frac{x}{\mu}\right) \right).$$

Естественность данных определений легко выясняется на обычных функциях из пространства  $S$ .

### § 8.3. Преобразование Фурье обобщенных функций

Отметим, что если функция  $\varphi$  принадлежит  $S$ , то ее

преобразование Фурье  $\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-ixt} dt$  также

принадлежит  $S$ .

При этом преобразование  $\psi = \tilde{\varphi}$  отображает  $S$  на  $S$  линейно и непрерывно.

Непрерывность заключается в том, что если какая-либо последовательность функций  $\varphi_n \in S$  сходится в смысле  $S$  к функции  $\varphi$ , то и  $\tilde{\varphi}_n$  сходится к  $\tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{\varphi}_n \rightarrow \tilde{\varphi} (S) \text{ при } \varphi_n \rightarrow \varphi (S).$$

Подобные факты имеют место и для обратного преобразования Фурье  $\hat{\varphi}$  функции  $\varphi \in S$

$$\left( \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{ixt} dt \right).$$



После сделанных замечаний естественно определить преобразование Фурье обобщенной функции  $F \in S'$  с помощью следующих равенств:

$$(\tilde{F}, \varphi) = (F, \tilde{\varphi}), (\hat{F}, \varphi) = (F, \hat{\varphi}). \quad (1)$$

Так как для функции  $\varphi \in S$  имеет место равенство  $\hat{\hat{\varphi}} = \tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$  (см. § 4.12, с. 120), то подобные равенства верны также для обобщенных функций:  $\hat{\hat{F}} = \tilde{\tilde{F}} = F, F \in S'$ . В самом деле, например,  $(\hat{\hat{F}}, \varphi) = (\tilde{\tilde{F}}, \hat{\varphi}) = (F, \tilde{\tilde{\varphi}}) = (F, \varphi)$ , откуда следует, что  $\hat{\hat{F}} = F$ .

Отметим еще, что если  $\varphi(t) \in S$ , то  $\tilde{\varphi}(t), t\tilde{\varphi}(t), \varphi'(t)$  также принадлежат  $S$ , и имеет место равенство

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} it\tilde{\varphi}(t)e^{itx} dt \quad (2)$$

$$\left( \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -it\hat{\varphi}(t)e^{-itx} dt \right)$$

или, коротко,

$$\varphi' = \widehat{it\tilde{\varphi}} = -\widehat{it\hat{\varphi}}.$$

Для обобщенных функций имеет место подобный факт:

$$F' = \widehat{ix\tilde{F}} = -\widehat{ix\hat{F}}. \quad (3)$$

В самом деле, например в силу (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{(-ix\hat{F}, \varphi)} &= \widetilde{(-ix\hat{F}, \tilde{\varphi})} = \widetilde{(\hat{F}, -ix\tilde{\varphi})} = \\ &= (F, -ix\hat{\tilde{\varphi}}) = -(F, \varphi') = (F', \varphi), \end{aligned}$$

т. е.  $F' = -ix\hat{F}$  и (3) доказано.

По индукции легко выводим, что

$$F^{(k)} = \widehat{(ix)^k \tilde{F}} = \widetilde{(-ix)^k \hat{F}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

**Пример.** Найти преобразование Фурье обобщенной функции Дирака.

**Решение.** По определению имеем

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\delta}, \varphi) &= (\delta, \tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt \Big|_{x=0} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt.
 \end{aligned}$$

Отсюда  $\tilde{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Аналогично можно получить, что

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Преобразование Фурье обобщенных функций обладает свойствами преобразований Фурье обычных функций, отмеченных в задачах § 4.12. Например, если  $\hat{F} \in S'$ , то  $\widehat{e^{i\mu t} F} = F(x + \mu)$  при любом действительном  $\mu \neq 0$ .

В самом деле, на основании подобного свойства для функций из  $S$  имеем

$$\begin{aligned}
 (\widehat{e^{i\mu t} F}, \varphi) &= (e^{i\mu t} \tilde{F}, \hat{\varphi}) = (\tilde{F}, e^{i\mu t} \hat{\varphi}) = \\
 &= (F, \widetilde{e^{i\mu t} \hat{\varphi}}) = (F, \varphi(x - \mu)) = (F(x + \mu), \varphi),
 \end{aligned}$$

откуда  $\widehat{e^{i\mu t} F} = F(x + \mu)$ .

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автономная нормальная система 105, 106  
Амплитуда колебания 29  
Аналитическая функция 405, 407  
Асимптотически устойчивое решение 138
- Бернулли уравнение 36, 59  
Бесселя функции 132
- Вариации метод 87  
Вариационная задача 392  
Вейерштрасса признак 224  
– теорема 343  
Вектор собственный 115  
Вектор-функция 235  
Векторов поле 235  
Внешняя мера множества  
– фигура 161, 162  
Внутренняя мера множества 162  
– фигура 162  
Вронскиан 76  
Вронского определитель 76  
Вычет функции 444, 448, 454  
Вычисление интегралов при помощи вычетов 455  
– – – – операционного исчисления 494
- Гамма-функция 228, 475  
Гармоника 293  
Гармоническая функция 415, 416  
Гармоническое колебание 291, 292  
Главная часть ряда Лорана 441
- Гладкая поверхность 157, 158  
Градиент функции 241
- Двойной интеграл 155  
Дельта-функция 501  
Диаметр множества 155  
Дивергенция вектора 278  
Дифференцирование изображения 474  
– оригинала 475
- Жордана мера 161
- Задача Дирихле 363, 364  
– Коши 14  
– поставленная корректно 137  
– Штурма–Лиувилля 387  
Замена переменных в интеграле 187, 189  
Замкнутый контур 231  
Запаздывание оригинала 479
- Изображение Лапласа 468  
– свертки 481  
– функции 469  
Изоклина 23  
Интеграл двойной 155  
– Дирихле 390  
– зависящий от параметра 219  
– кратный 154, 159  
– криволинейный второго рода 238  
– – первого рода 233  
– матрицы 108  
– от вектора вдоль кривой 233  
– по ориентированной плоской области 268  
– – поверхности первого рода 259

- повторный 176, 323
- простой Фурье 323
- Пуассона 217
- Римана 155
- типа Коши 434
- тройной 156
- Фурье 323
- Интегральная кривая 13
- Интегрирование изображения 477
  - оригинала 477
  - уравнений при помощи рядов 128
  - функций комплексного переменного 425
- Классификация изолированных особых точек 444, 451
  - особых точек на бесконечности 451
  - точек покоя 142
- Колебание мембраны 382
  - пружины 99
  - струны 376, 381
- Контур замкнутый 231
- Конформное отображение 407
- Координаты полярные 193, 196
  - сферические 193, 196
  - центра масс 208
  - цилиндрические 198
- Корректно поставленная задача 137
- Косинус-преобразование Фурье 331
- Коэффициенты тригонометрического ряда 293
  - Фурье 308, 309, 314, 349
- Кривая замкнутая 232
  - – самонепересекающаяся 232
  - кусочно-гладкая 230
  - непрерывная 230
  - ориентированная 230
- Кусочно-гладкая поверхность 157, 158
- Лапласа уравнение 363, 366
- Лебега мера 162
- Линейное уравнение высшего порядка 73
  - – первого порядка 24
- Линейность изображения 472
- Лист Мёбиуса 263
- Матрица единичная
  - Коши 112
  - обратная 108
  - симметрическая 120
  - фундаментальная 110
- Мера Жордана 151
  - Лебега 162
- Метод вариации произвольной постоянной 87
  - касательных 46
  - Лагранжа 125
  - Ньютона 45
  - Фурье разделения переменных 369
  - Эйлера приближенного решения уравнения 51
- Метрическое пространство 40
- Множество меры нуль 163
  - связное 370
- Момент инерции 212
- Начальное условие 15, 60, 62, 363
- Неподвижная точка оператора 42
- Неравенство Бесселя 316
  - Буняковского 311
  - Минковского 312
  - треугольника 40
- Несобственный интеграл 213, 215
  - – абсолютно сходящийся 214

- – зависящий от параметра 219
- – равномерно сходящийся 221, 227
- – сходящийся 213, 215
- Неустойчивый узел 146
- Норма функции 311
  
- Область односвязная 247, 404
  - многосвязная 404
  - типа  $H$  254
  - элементарная 254
- Обобщенная функция 498
- Образ множества 402
- Общий интеграл дифференциального уравнения 17
- Огибаемая кривая 57
- Огибающая семейства кривых 57
- Оператор аддитивный 73
  - Гамильтона 246
  - Лапласа 415, 419
  - линейный 73
  - – дифференциальный  $n$ -го порядка 73
  - непрерывный 42
  - однородный 73
  - самосопряженный 120
  - сжимающий 42
- Операционное исчисление 468
- Определитель Вронского 76
  - Якоби 189, 190
- Оригинал 469
- Ориентация кривой 230
  - области 252
  - поверхности 264, 266
- Ортогональная система функций 314
- Ортогональность функций 306
- Ортонормированная система функций 314
- Особая точка интеграла 213, 227
- Особенность существенная 447
  - устранимая 445
- Особое решение 56
  
- Оценка коэффициентов Фурье 309
  
- Площадь поверхности 200, 206
- Поверхностный интеграл второго рода от вектора 275
- Поверхность гладкая 200, 204
  - кусочно-гладкая 266
  - полиэдральная 289
- Показатель роста функции 469
- Поле векторов 235
  - направлений 22
  - потенциала 241
  - соленоидальное 284
  - трубчатое 284
- Полная ортогональная система функций 318
- Полнота тригонометрических функций 318
- Полнота систем функций в  $C$  и  $L'_2$  342
- Положение равновесия системы 139
- Полус функция 446
- Понижение порядка уравнения 69
- Последовательность итерационная 43
  - сходящаяся 41
  - фундаментальная 41
  - функций 41
  - – сходящаяся 41
  - –, – в смысле среднего квадратического 312
  - –, – по норме 312
  - –, – равномерно 42
- Потенциал 241
- Поток вектора 271
- Правильная часть ряда Лорана 440
- Преобразование Лапласа 469
  - – свертки 481
  - Фурье 330, 331, 391, 395, 503

- Хевисайда 469
- Признак Вейерштрасса 228
- Признаки сходимости ряда Фурье 299, 302
- Принцип сжатых отображений 42
- Проблема Штурма–Лиувилля 388
- Производная от матрицы 107
  - – обобщенной функции 501
  - – функции 404
- Простой интеграл Фурье 328
- Пространство линейное 498
  - метрическое 40
  - непрерывных функций 41
  - полное 41
  - $S, (S')$
  - со скалярными произведениями 310
  - фазовое 103, 106
- Прямое произведение множеств 220
- Прямоугольник 157
  
- Равенство Парсеваля–Стеклова 319
- Равномерно сходящийся несобственный интеграл 220, 227
- Расстояние 40
- Регулярная обобщенная функция 501
- Решение асимптотически устойчивое 138
  - Даламбера 38
- Решение дифференциального уравнения
  - общее линейного уравнения неоднородного 73, 90
  - – – – однородного 81
  - особое 56
  - устойчивое 137
  - частное 90, 124
- Ротор вектора 246
- Ряд Лорана 438
  - степенной 435
  - Тейлора
  - тригонометрический 291
  - Фурье 299, 340
    - – в комплексной форме 322
    - – по ортогональной системе функций 314
    - – кратный 346
- Свертка функций 481
- Связное множество 370
- Седло 153
- Синус-преобразование Фурье 381
- Система дифференциальных уравнений 63, 103
  - линейная 107
  - – с постоянными координатами 81, 112
    - – – однородная 81
    - – – неоднородная 90, 124
- Система координат левая 264
  - – полярная 193, 196
  - – правая 264
  - – сферическая 198
  - – цилиндрическая 198
  - линейно зависимых функций 74
    - – независимых функций 75
  - уравнений автономная 105, 106
    - – гиперболическая 152, 153
    - – динамическая 105
    - – нормальная 64
    - – однородная
    - – параболическая 152, 153
    - – эллиптическая 152, 153
  - функций ортогональная 314
- Скалярное произведение функций 310
- Собственная функция 101, 388
- Собственное значение 101, 388
- Собственный вектор 115

- Соленоидальное поле 284  
 Спектр непериодической функции 337  
 – периодической функции 337  
 Стационарное распределение тепла 363  
 Сторона поверхности 262  
 Струна 361, 376  
 Сумма интегральная Римана 159  
 – Фейера 337  
 – Фурье 338  
 Сходимость в среднем квадратическом 312  
 – несобственного интеграла 213  
 – по норме 312  
 – последовательности обобщенных функций 502  
 – степенного ряда 435  
  
 Таблица изображений 485  
 Температура тела 361  
 Теорема Гаусса–Остроградского 276  
 – Гюльдина 209, 210  
 – Дюамеля 482  
 – Коши 428  
 – Ляпунова 140  
 – о вычетах 454  
 – Стокса 285  
 – существования решения системы уравнений 64, 67  
 Теорема существования решения уравнения высшего порядка 66  
 – – – – первого порядка 47  
 – Фейера 341  
 Точка неподвижная оператора 42  
 – особая изолированная  
 – покоя 139  
 Траектория фазовая 105  
 Узел неустойчивый 146  
 – устойчивый 144  
 Уравнение Бернулли 36, 59  
 – Бесселя 130  
 – в вариациях 394  
 – дифференциальное 11  
 – – высшего порядка 65, 73  
 – – линейное 32, 73  
 – – обыкновенное 12  
 – – – первого порядка в полных дифференциалах 13, 24, 252  
 – – – – – однородное 29  
 – – – – – с разделенными переменными 26, 28  
 – изображающее колебания мембраны 382  
 – – струны 376, 381  
 – с постоянными коэффициентами 81, 90  
 – теплопроводности 369, 374  
 – характеристическое 82, 114  
 Условия Коши–Римана 411, 412  
  
 Фаза колебания 291  
 Фазовая скорость 106  
 – траектория 105  
 Фазовое пространство 103, 106  
 Фигура внешняя множества  
 – внутренняя множества 161  
 Фокус 149  
 Формула Грина 254  
 – Даламбера 381, 382  
 – Дюамеля 482  
 – Коши 431  
 – Меллина 484  
 – Стокса 285  
 Фубини теорема 478  
 Фундаментальная матрица 110  
 – последовательность 46  
 – система решений 74  
 Функции Бесселя 132

- линейно зависимые 74
- – независимые 74, 75
- Функционал** 391, 498
  - линейный 498
  - непрерывный 498
- Функция гамма** 228
  - гармоническая 363, 365
  - гиперболическая 410
  - Дирака 501
  - дробнолинейная 462
  - единичная 470
  - комплексного переменного 401
    - линейная 462
    - – –многозначная 462
    - – – однозначная 402
  - натуральный логарифм 422
  - обобщенная 495
  - обратная 419
  - показательная 409
  - потенциальная 241
  - степенная 408
  - финитная 497
- Фурье интеграл** 323
  - – повторный 329
- Фурье интеграл простой** 328
  - коэффициент 299, 300
  - преобразование 330
  - обобщенной функции
    - – обратное 330
    - – прямое 330
  - ряд 299, 315, 322, 349, 353
- Характеристическое уравнение 82, 114
- Центр
  - масс 208
  - тяжести 208
- Цилиндрические координаты 198
- Циркуляция вектора 286
- Частное решение 90, 124
  - – неоднородного уравнения 90
- Частота колебания 291, 293
- Штопор левый 264
  - правый 264
- Эйлера ломаная 51
  - метод приближенного решения дифференциального уравнения 51
  - уравнение 86
- Эквивалентные уравнения 14
- Элементарная н. область 254, 277
- Эллиптическая система уравнений 257
- Ядро Дирихле 339
  - Фейера 340
- Якоби определитель 189, 190
- Якобиан 189, 190



*Учебное издание*

**Бугров Яков Степанович  
Никольский Сергей Михайлович**

## **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

**В трех томах**

**Том 3**

*Дифференциальные уравнения.  
Кратные интегралы. Ряды.  
Функции комплексного переменного*

*Учебник для вузов*

Заведующий редакцией *Б. В. Понкратов*  
Ответственный редактор *Ж. И. Яковлева*  
Разработка серийного оформления  
*Т. Е. Добровинская-Владимирова*  
Художник *Е. А. Адамов*

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 28.04.04. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ . Бумага типографская.  
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 26,9. Тираж 4000 экз. Заказ № 3966.

ООО «Дрофа».

127018, Москва, Сушеvский вал, 49.

**По вопросам приобретения продукции  
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**

127018, Москва, Сушеvский вал, 49.

Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».

109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины: «Переплетные птицы»:

127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.

Тел.: (095) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,  
ул. Октябрьской революции, 366/2.

Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов на ФГУП ордена «Знак Почета»  
Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова.  
214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2.